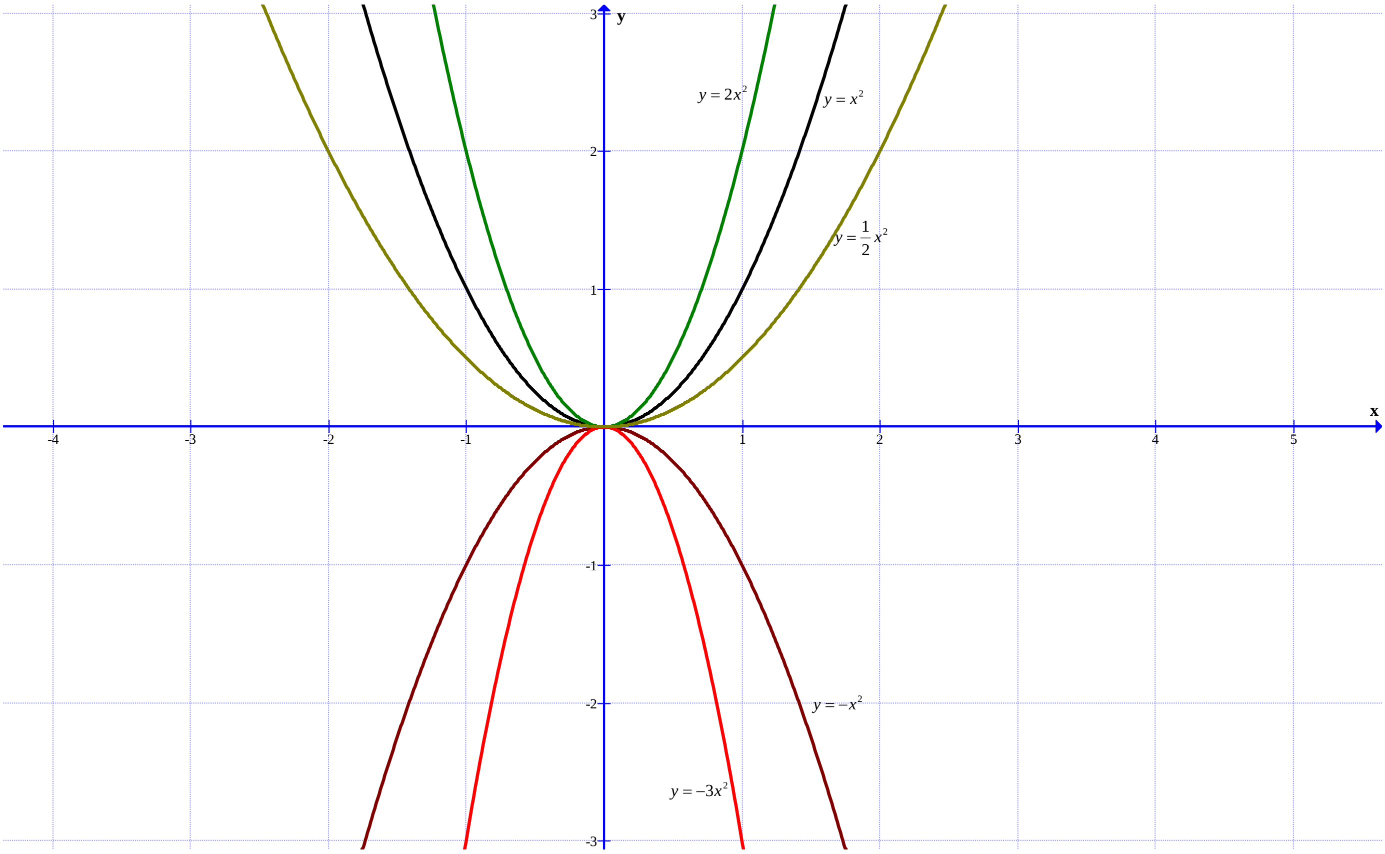
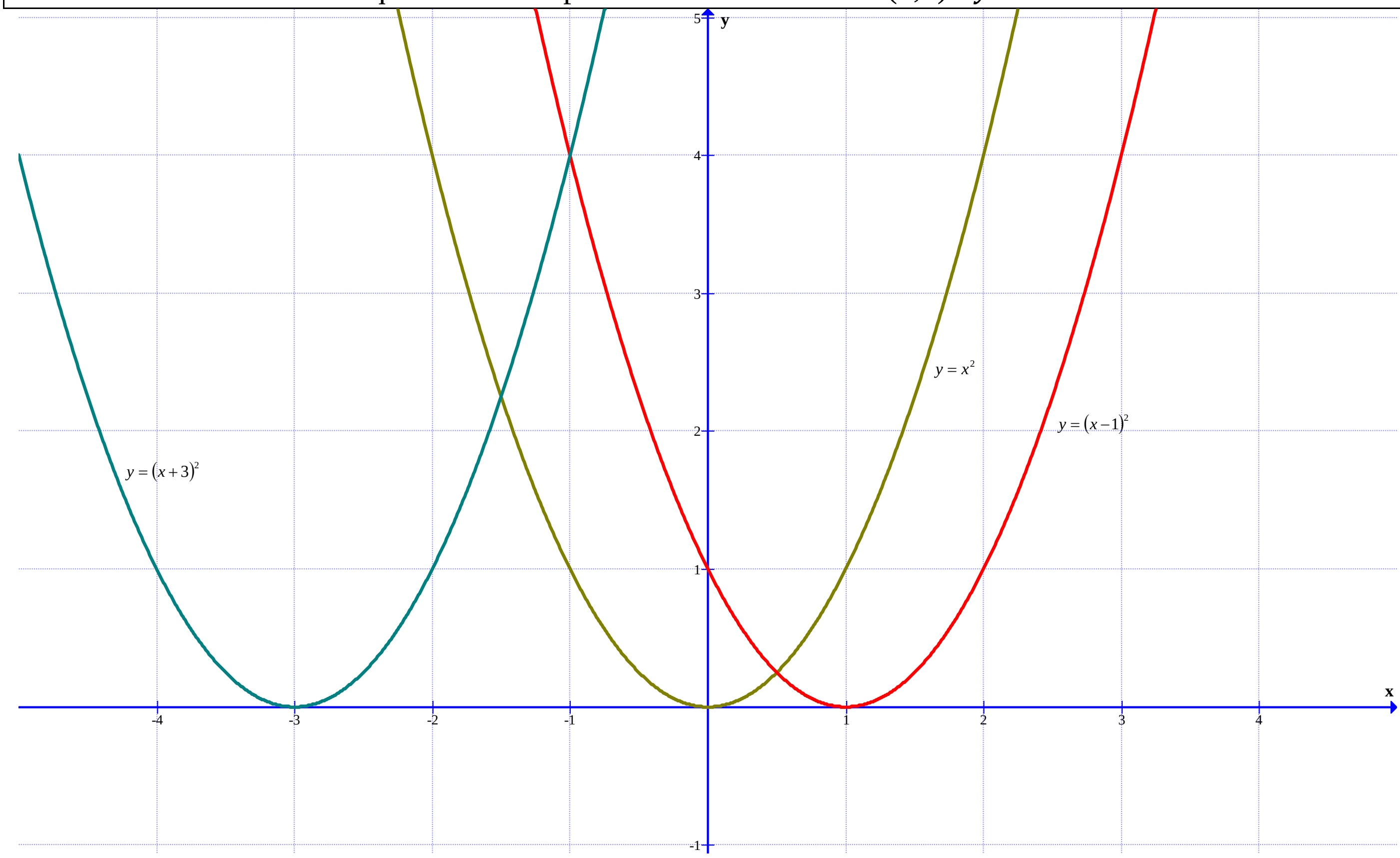
Parabole

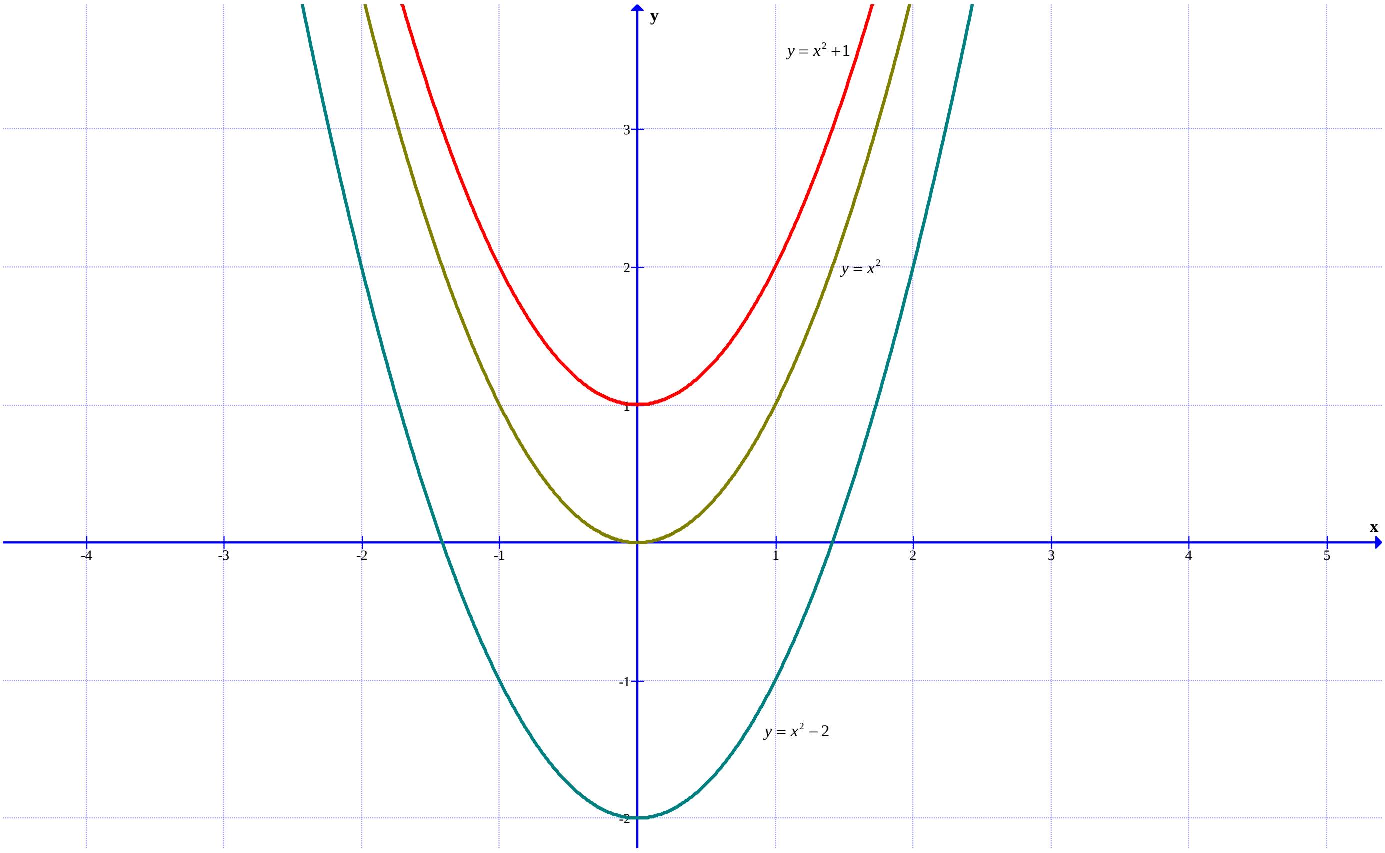
(per studenti del biennio)



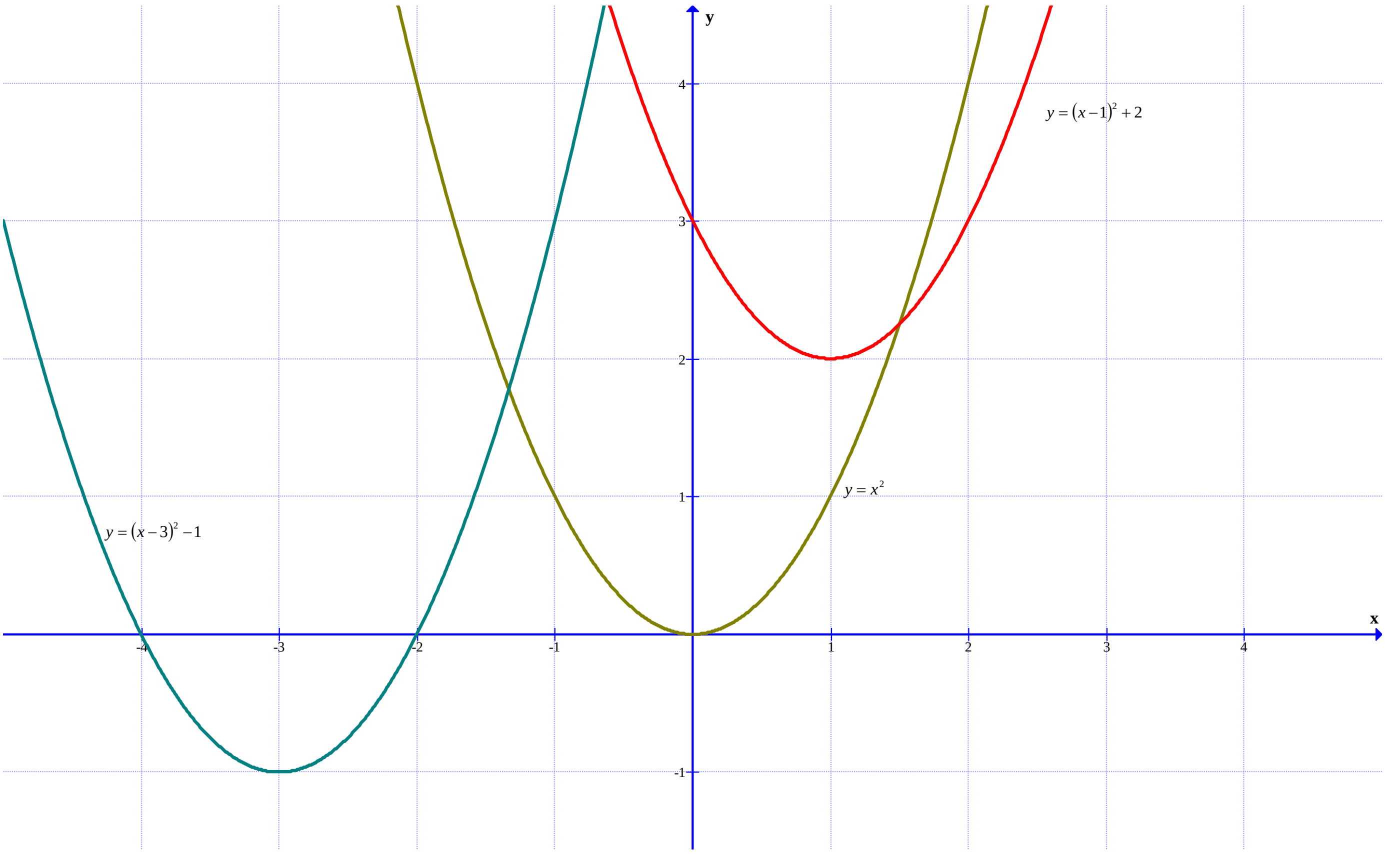
Equazione della parabola con vertice in O(0,0) : $y = ax^2$

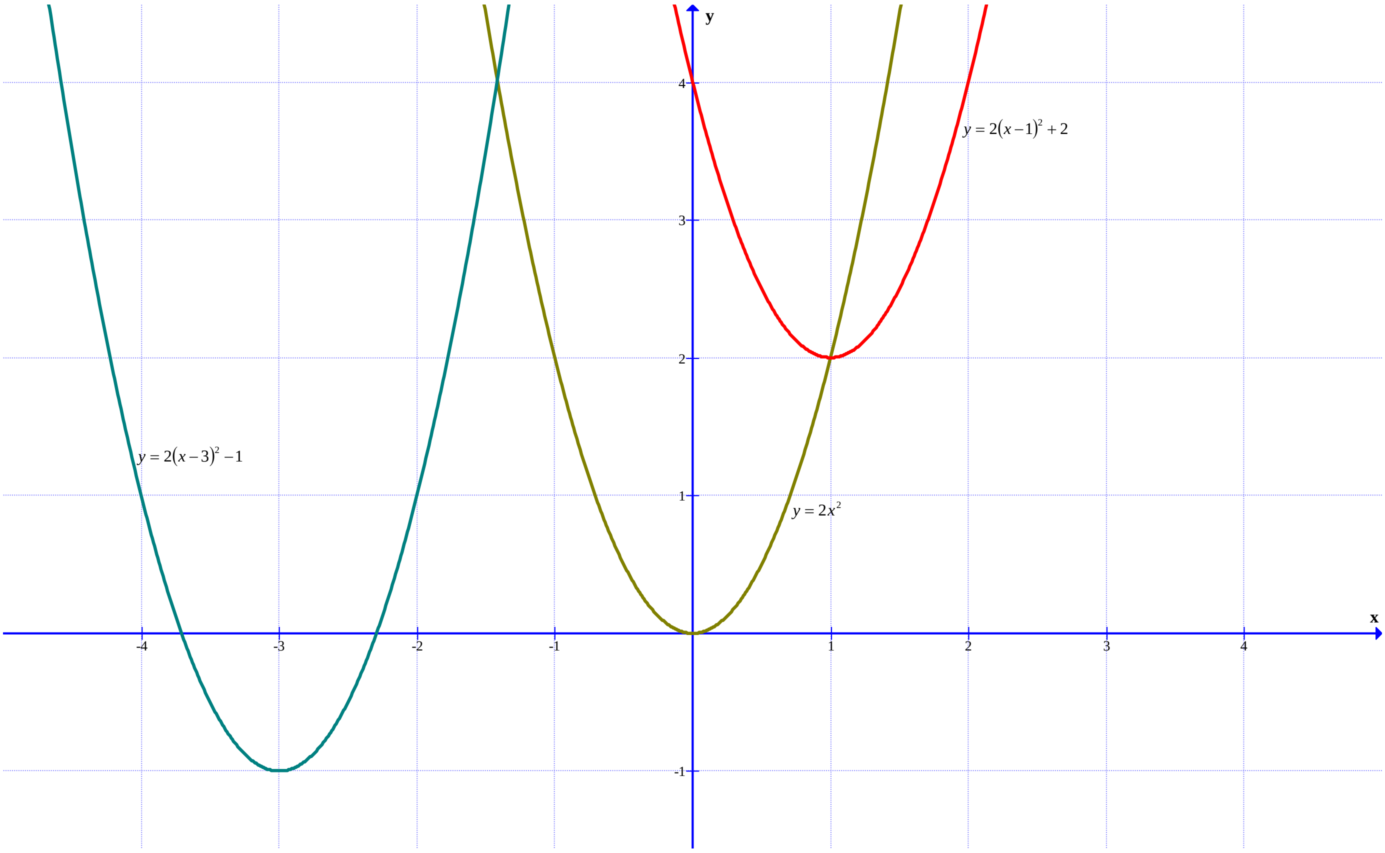


Equazione della parabola con vertice in V(x_0,0) : $y = a(x - x_0)^2$



Equazione della parabola con vertice in V(0,y_0) : $y = ax^2 + y_0$





In generale una parabola con asse parallelo all'asse delle y e vertice in $V(x_0, y_0)$ ha un'equazione del tipo:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Sviluppando il quadrato :

$$y = ax^2 - 2axx_0 + ax_0^2 + y_0,$$

equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, dove

$$\begin{cases} b = -2ax_0 \\ c = ax_0^2 + y_0 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema rispetto a x_0 e y_0:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases} \qquad (*)$$

Dunque:

una funzione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle y, avente vertice in $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Esempio 1 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle *y*) avente vertice in O(0,0) e passante per:
a) A(2,3)
b) B(1, -5)
c) C(-1,-3)

Soluzione

In tutti e tre i casi la parabola ha equazione del tipo $y = ax^2$.
a) Imponendo il passaggio per A, si ha $3 = a2^2$ da cui $a = \frac{3}{4}$; parabola : $y = \frac{3}{4}x^2$.
b) Imponendo il passaggio per B, si ha $-5 = a1^2$ da cui $a = -\frac{1}{5}$; parabola : $y = -\frac{1}{5}x^2$.
c) Imponendo il passaggio per C, si ha $-3 = a(-1)^2$ da cui $a = -3$; parabola : $y = -3x^2$.

Esempio 2 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle *y*) avente::
a) vertice in V(2,0) e passante per A(3,3)
b) vertice in V(-1,0) e passante per B(1, -5)
c) vertice in V(4,0) e passante per C(-1,-3)

Soluzione

In tutti e tre i casi la parabola ha equazione del tipo $y = a(x - x_0)^2$ (x_0 è l'ascissa del vertice).
a) Parabola $y = a(x-2)^2$; passa per A, dunque: $3 = a(3-2)^2$, da cui $a = 3$.
Parabola $y = 3(x-2)^2$, da cui, infine: $y = 3x^2 - 12x + 12$
b) Parabola $y = a(x+1)^2$; passa per B, dunque: $-5 = a(1+1)^2$, da cui $a = -\frac{5}{4}$.
Parabola $y = -\frac{5}{4}(x+1)^2$, da cui, infine: $y = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$.
c) Parabola $y = a(x-4)^2$; passa per C, dunque: $-3 = a(-1-4)^2$, da cui $a = -\frac{3}{25}$.
Parabola $y = -\frac{3}{25}(x-4)^2$, da cui, infine: $y = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{24}{25}x - \frac{48}{25}$.

Esempio 3 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle *y*) avente::
a) vertice in V(0,3) e passante per A(1,2)
b) vertice in V(0,-2) e passante per B(1, 5)
c) vertice in V(0,1) e passante per C(-1,-3)

Soluzione

In tutti e tre i casi la parabola ha equazione del tipo $y = ax^2 + y_0$(y_0 è l'ordinata del vertice).
a) Parabola $y = ax^2 + 3$; passa per A, dunque: $2 = a1^2 + 3$, da cui $a = -1$.
Parabola $y = -x^2 + 3$.
b) Parabola $y = ax^2 - 2$; passa per B, dunque: $5 = a1^2 - 2$, da cui $a = 7$.
Parabola $y = 7x^2 - 2$.
c) Parabola $y = ax^2 + 1$; passa per C, dunque: $-3 = a(-1)^2$, da cui $a = -3$.
Parabola $y = -3x^2 - 3$.

Esempio 4 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse delle *y*) avente::
a) vertice in V(1,3) e passante per A(2,2)
b) vertice in V(3,-2) e passante per B(1, 5)

Soluzione

In tutti e tre i casi la parabola ha equazione del tipo $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (x_0, y_0 sono le coordinate del vertice).

a) Parabola $y = a(x - 1)^2 + 3$; passa per A, dunque: $2 = a1^2 + 3$, da cui a = -1. Parabola $y = -(x - 1)^2 + 3$. Sviluppando il quadrato: $y = -x^2 + 2x + 2$

b) Parabola $y = a(x - 3)^2 - 2$; passa per B, dunque: $5 = a(1 - 3)^2 - 2$, da cui $a = 7/4$. Parabola $y = \frac{7}{4}(x - 3)^2 - 2$. Sviluppando il quadrato si ottiene l'equazione $y = \frac{7}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{55}{4}$

Esercizi

1) Scrivere l'equazione della parabola ad asse parallelo all'asse delle *y* nei seguenti casi (disegnare anche la parabola ottenuta):
a) Vertice (0,0) e passante per (3,5)
b) Vertice in (-2,0) e passante per (1,-3)
c) Vertice in (0,4) e passante per (6,5)
d) Vertice in (0,-1) e passante per (2,4)
e) Vertice in (1,-4) e passante per (2,5)
f) Vertice in (2,1) e passante per (-3,-1)
g) Passante per (-1,0), (2,1) e (4,5)

2) Per ciascuna delle parabole che seguono determinarne gli elementi caratteristici (vertice, asse, intersezioni, ove esistono, con gli assi cartesiani) e darne una rappresentazione grafica:
a) $y = (x - 2)^2 + 3$
b) $y = 2x^2 + 4x + 2$
c) $y = -x^2 + 3x$
d) $y = 3x^2 - x - 2$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

3) Nel piano cartesiano, riferito ad un sistema di riferimento ortonormato *x*O*y*, sono date la parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ e la retta $y = -2x + 3$.
a) Disegnare la parabola e la retta nel riferimento cartesiano dato.
b) Determinare le coordinate dei punti d'intersezione della parabola e della retta (siano A e B).
c) Calcolare l'area del triangolo OAB ed il suo perimetro.

4) Come per l'esercizio 3) ma per la parabola $y = -x^2 - x + 2$ e per la retta $y = -x - 2$.

5) Nel piano cartesiano, riferito ad un sistema di riferimento ortonormato *x*O*y*, sono date le parabole $y = x^2 - x - 2$ e $y = -2x^2 + 8$.
a) Disegnare le due parabole dopo averne determinato gli elementi caratteristici (vertice, intersezioni con gli assi cartesiani).
b) Determinare algebricamente le coordinate dei punti d'intersezione delle due parabole.
c) Verificare che la prima parabola è tangente (due intersezioni coincidenti) alla retta *r*: $y = -x - 2$.
d) La seconda parabola interseca la retta *r* nei punti A e B. Determinare algebricamente le coordinate di questi punti.