Progressioni aritmetiche

Cominciamo con due esempi:

Esempio 1 Consideriamo la successione di numeri:

3, 7, 11, 15, 19, 23

+4 +4 +4 +4 +4

La successione è tale che si passa da un termine al successivo aggiungendo sempre +4. Si dice anche che la successione precedente è una *progressione aritmetica*. '3' è il primo termine della progressione, '23' è l'ultimo termine e '+4' (il numero che si aggiunge ad un termine per avere il successivo) si chiama *ragione* della progressione. Inoltre visto che i termini aumentano sempre, la progressione considerata è crescente.

Esempio 2 Consideriamo la successione di numeri:

15, 9, 3, -3

-6 -6 -6

La successione è tale che si passa da un termine al successivo aggiungendo sempre -6. La successione precedente è una *progressione aritmetica* di ragione -6. I termini della successione diminuiscono sempre e la progressione considerata è decrescente.

Possiamo generalizzare quanto visto nei due esempi precedenti con la seguente definizione:
Una progressione aritmetica é una successione di numeri reali tale che la differenza tra due termini consecutivi della successione è costante. Questa costante si chiama ***ragione*** della progressione stessa: se la ragione è positiva la successione è *crescente*, se la ragione è negativa la succesione è *decrescente*.

Simbolicamente, indicando con a_n il termine n-simo della successione e con d la sua ragione, possiamo scrivere:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$
...
$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n - 1)d$
dove l'ultima espressione:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d} \qquad (1)$$

fornisce una relazione generale per calcolare il termine di posto n (a_n) di una progressione aritmetica di cui si conosce il primo ternine (a_1) e la ragione (d).

Esempio 3 Calcolare il 13-mo termine di una progressione aritmetica per cui il primo termine vale 2 e la ragione vale 5.

Applicando la formula precedente, abbiamo subito:

$a_{13} = a_1 + (13\text{-}1)d = 2 + 12\times5 = 2 + 60 = 62$.

La relazione (1) puó essere utilizzata per calcolare uno qualunque degli elementi presenti a partire dagli altri. Cosí possiamo scrivere anche le relazioni:

$$a_1 = a_n - (n-1)d \qquad (2)$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \qquad (3)$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \qquad (4)$$

Esempio 4 Calcolare la ragione di una progressione aritmetica di cui si conosce il primo termine uguale a 4 ed il 15-mo uguale a 21.

Applicando la formula (3) precedente, abbiamo subito:

$$d = \frac{21-4}{15-1} = \frac{17}{14}.$$

Esempio 5 Di una progressione aritmetica si sa che il primo termine vale 35, che il suo termine n-simo vale 1 e che la ragione vale -1/3. Calcolare n.

Applicando la formula (4) precedente, abbiamo subito:

$$n = \frac{1-35}{-\frac{1}{3}} + 1 = -34 \times (-3) + 1 = 103.$$

Esempio 6 Di una progressione aritmetica si sa che $a_3 = 1$ e $a_7 = 17$. Calcolare:
1) la ragione d;
2) il primo termine a_1.

Applicando la formula (1) precedente due volte, abbiamo subito:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_7 = a_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_7 - a_1 = 4d \\ a_1 = a_3 - 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17 - 1 = 4d \\ a_1 = 1 - 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = -7 \end{cases}.$$

Esempio 7 Tra due numeri assegnati 4 e 25 determinare altri quattro numeri (compresi tra i due dati), in modo da ottenere sei numeri in progressione aritmetica.

Per risolvere il problema, basta tener conto del fatto che, dei sei numeri in progressione aritmetica, $a_1 = 4$ e $a_6 = 25$ e $n = 6$. Applichiamo allora la formula (3) precedente ed abbiamo:

$$d = \frac{a_6 - a_1}{6-1} = \frac{25-4}{5} = \frac{21}{5}.$$

I quattro numeri richiesti sono allora:

$$a_2 = 4 + \frac{21}{5} = \frac{41}{5}, \quad a_3 = \frac{41}{5} + \frac{21}{5} = \frac{62}{5},$$

$$a_4 = \frac{62}{5} + \frac{21}{5} = \frac{83}{5}, \quad a_5 = \frac{83}{5} + \frac{21}{5} = \frac{104}{5}.$$

É interessante notare che, per una progressione aritmetica, *la somma dei termini equidistanti dagli estremi è costante*. Cosí, per la progressione dell'**Esempio 1**, abbiamo:

$$3 + 23 = 7 + 19 = 11 + 15 = 26.$$

Per la progressione dell'**Esempio 2**, abbiamo:

$$15 + (-3) = 9 + 3 = 12.$$

In generale, abbiamo che:

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_{n-1} = a_1 + a_n$,

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_{n-2} = a_1 + a_n$,

...

$a_{r+1} + a_{n-r} = a_1 + rd + a_{n-r} = a_1 + a_n$,

e, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$\boxed{a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_{r+1} + a_{n-r} = a_1 + a_n \qquad (5)}$$

Il risultato precedente è importante per dimostrare la formula che consente di calcolare la somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica. Infatti, per la proprietà commutativa dell'addizione di numeri reali, possiamo scrivere:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$

e, sommando membro a membro:

$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$;

per la proprietà (5)

infine,

$$\boxed{S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \qquad (6)}$$

Esempio 8 Calcolare la somma dei primi 103 termini della progressione aritmetica dello **Esempio 5** (dove a_1 =35 e a_{103} = 1).

Applicando la formula (6) precedente, abbiamo subito:

$$S_{103} = 103\frac{35+1}{2} = 1854 .$$

Nota storica A proposito della formula (6) e della proprietà (5), sembra che il matematico tedesco GAUSS (1777-1855), il *principe dei matematici*, abbia intuito i due risultati all'età di 9 anni, durante l'esecuzione di un test di Matematica. Dovendo calcolare la somma dei primi 60 numeri interi (da 1 a 60), il ragazzo Gauss porto immediatamente la risposta al proprio maestro, dopo aver notato che la somma dei termini equidistanti dagli estremi era sempre uguale a 61 (1+60 = 2+59 = 3+58 = ...) e che quindi bastava moltiplicare questa somma costante per il numero delle coppie da sommare (30), ottenendo cosí: 30×61 = 1830.
Si racconta anche che il maestro di Gauss, stupito da tanta astuzia, regaló al precoce ragazzo un libro di aritmetica, ignorando certamente che quel ragazzo sarebbe diventato uno dei piú celebri matematici di tutti i tempi.

Esercizi

1 Scrivere i primi sei termini di una progressione aritmetica il cui primo termine è uguale a 2 e la cui ragione è uguale a 2/3.

2 Calcolare il ventesimo termine della progressione aritmetica dello esercizio **1**.

3 Una progressione aritmetica è tale che $a_7 = 28$ e $d = -2$. Calcolare a_1 e a_{25}.

4 Calcolare il numero n dei termini di una pogressione aritmetica di ragione 3, sapendo che $a_n = 37$ e $a_1 = 1$.

5 Per l'esercizio precedente, calcolare S_{13} (somma dei primi 13 termini della progressione).

6 Di una progressione aritmetica si conosce $a_{25} = 152$ e $d = -3$.
Calcolare:
a) a_1;
b) S_{25};
c) S_{125}.

7 Tra i numeri 4 e 125 inserire 5 numeri (compresi tra i due dati), in modo da ottenere una progressione aritmetica:
a) crescente;
b) decrescente.

8 Di una progressione aritmetica si sa che $a_5 = 12$ e $a_{12} = 47$. Calcolare:
1) la ragione d;
2) il primo termine a_1;
3) S_{35}.

9 Calcolare x in modo che $5x - 2$, $7x + 3$, $4x + 1$ siano termini consecutivi di una progressione aritmetica.

10 Calcolare la somma dei primi n numeri dispari.

11 Calcolare la somma dei primi n numeri pari.

12 Un capitale di 30 ML viene depositato in banca con un *interesse semplice* annuo del 7% (questo significa che, alla fine di ogni anno di deposito, il capitale aumenta del 7% del suo valore al momento del deposito).
Determinare l'evoluzione del capitale fino alla fine dei primi sette anni di deposito.

13 Dimostrare che, depositando un capitale C ad un interesse semplice annuale i, dopo t anni di deposito il capitale è uguale a $C(1+it)$.

14 Per perforare un pozzo di 20 m di profondità si domanda il preventivo da tre ditte. La ditta A chiede una somma fissa di 700000 lire per movimento mezzi e di 100000 lire per metro di scavo. La ditta B chiede una somma fissa di 500000 lire per movimento mezzi e di 120000 lire per metro di scavo. La ditta C chiede una somma fissa di 800000 lire per movimento mezzi e di 90000 lire per metro di scavo. Determinare quale dei tre preventivi risulta piú conveniente.

15 Una successione di numeri reali si dice ***progressione armonica*** quando i reciproci dei suoi termini formano una progressione aritmetica. Fare due esempi di progressioni armoniche.

16 Inserire fra 2 e 9 due numeri x e y in modo che la successione

$$2 \quad x \quad y \quad 9$$

sia una progressione armonica.

17 a^2, b^2 e c^2 sono termini consecutivi di una progressione aritmetica. Provare che $a+b$, $a+c$ e $b+c$ sono termini consecutivi di una progressione armonica.

18 In una progressione aritmetica l'ottavo termine è doppio del quarto termine ed il ventesimo termine è uguale a 40. Calcolare la ragione ed il primo termine della progressione.