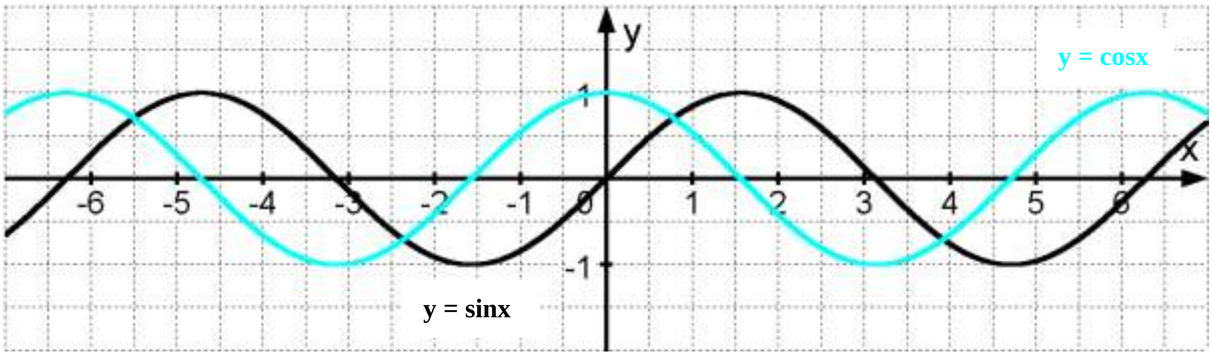
Prof. Raffaele SANTORO

Elementi di trigonometria



Scuola Europea di Lussemburgo - Anno Scolastico 1992-93

© 1993 - Tutti i diritti riservati

Riproduzione vietata con ogni mezzo

Indice

Introduzione

Queste note di Trigonometria, se da una parte sono state scritte esplicitamente per gli studenti delle Scuole Europee, dall'altra hanno anche l'ambizione di servire ad un triplice scopo:

1 come corso di base per studenti di scuola media superiore

2 come materiale di riferimento per una ripetizione per gli esami di maturità o per dei corsi universitari

3 come corso rapido per qualunque persona dotata di cultura media che voglia cimentarsi per la prima volta nello studio di tale disciplina.

Un'occhiata all'**Indice** mostra chiaramente i contenuti essenziali ed anche i limiti del lavoro proposto. Infatti, se è possibile trovare chiaramente le definizioni delle funzioni goniometriche, le loro proprietà, la loro rappresentazione grafica e quasi tutto il formulario indispensabile, manca la discussione su come risolvere alcuni tipi particolari di equazioni goniometriche, mancano le formule di Briggs (!), o altre applicazioni particolari alla geometria[1].

Ho preferito non dedicare neanche una parola all'uso della calcolatrice elettronica, per il calcolo delle funzioni goniometriche e delle loro inverse, in quanto esistono sul mercato diversi tipi di calcolatrici, ciascuna delle quali munita del manuale d'uso. Per contro ho preferito mettere alla fine delle note un'**Appendice** con una tavola numerica dei valori delle funzioni goniometriche per angoli che vanno da 0° a 45°.

Luxembourg, febbraio 1993

[1]Nella speranza di non incorrere, in tal modo, nelle invettive del Prof. Giulio CORTINI, che molti anni fa scrisse sulla terza pagina dell'***Unità*** un articolo il cui titolo suonava vagamente: *Trigonometria e patriottismo nazionale*.

1 Misura degli angoli

Gli angoli si possono misurare in *gradi sessagesimali*, oppure in *radianti*.

Un **grado sessagesimale** (°) è la 360-ma parte dell'angolo giro. In questo modo:
- un angolo giro misura 360°
- un angolo piatto misura 180°
- un angolo retto misura 90° .

Esistono dei sottomultipli del grado, il *primo* ('), uguale a 1/60 di grado, ed il *secondo* ("), uguale ad 1/60 di primo.

Un **radiante** è quell'angolo al centro di una circonferenza che si oppone ad un arco di lunghezza uguale al raggio della circonferenza. In questo modo:
- un angolo giro misura
$$\frac{\text{lunghezza circonferenza}}{\text{raggio}}\ \text{radianti} = \frac{2\pi r}{r}\ \text{radianti} = 2\pi\ \text{radianti}$$
- un angolo piatto misura π radianti
- un angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ radianti.

In generale, per convertire i gradi sessagesimali in radianti e viceversa, basta tener conto della seguente proporzione (dove α indica la misura di un angolo in gradi sessagesimali e ρ la misura dello stesso angolo in radianti):

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\rho}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{\pi}{180}\alpha & (1) \\ \alpha = \dfrac{180}{\pi}\rho & (2) \end{cases}$$

La relazione (1) consente di esprimere la misura di un angolo in radianti conoscendo la sua misura in gradi.

La relazione (2) consente di esprimere la misura di un angolo in gradi conoscendo la sua misura in radianti.

Esempi

1 Dalla relazione (2) si ha subito, ponendo in essa $\rho = 1$, che **un radiante corrisponde a circa 57°17'44"**.

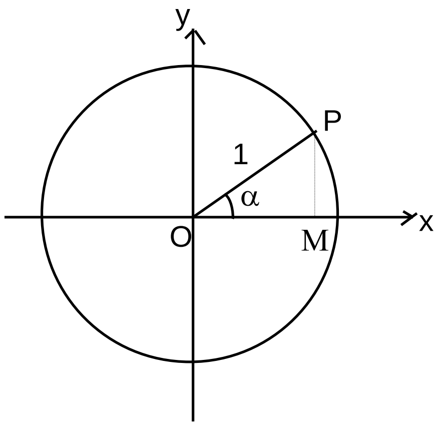
2 Dalla relazione (1), ponendo $\alpha = 30°$, si ha per lo stesso angolo una misura in radianti $\rho = \pi/6$.

Esercizi

1 Convertire in radianti i seguenti angoli: 15°, 45°, 130°20'18".

2 Convertire in gradi i seguenti angoli espressi in radianti: 0.123, 2.45, $\pi/8$.

2 Definizione delle funzioni goniometriche sin, cos, tan e cot.



Si definisce, nel piano cartesiano, **circonferenza goniometrica** quella circonferenza che ha il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio uguale ad 1.
Il punto P si chiama **punto goniometrico** corrispondente all'**angolo goniometrico** α (misurato sempre a partire dalla direzione positiva dell'asse x, in senso antiorario se positivo, in senso orario se negativo). La rappresentazione geometrica dell'angolo α è definita a meno di un multiplo intero di 360°.

Si definisce **seno** dell'angolo α il numero reale indicato $\sin\alpha$ e dato da:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{PM}}{1} = \mathrm{PM} \qquad (3)$$

Si definisce **coseno** dell'angolo α il numero reale indicato $\cos\alpha$ e dato da:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OM}}{1} = \mathrm{OM} \qquad (4)$$

La definizione (3) consente di affermare che: **il seno di un angolo goniometrico α è uguale all'ordinata del punto goniometrico corrispondente**.

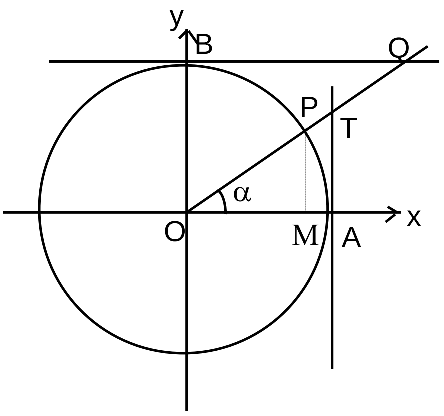
La definizione (4) consente di affermare che: **il coseno di un angolo goniometrico α è uguale all'ascissa del punto goniometrico corrispondente**.

Si definisce **tangente** dell'angolo α il numero reale indicato $\tan\alpha$ e dato da:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (5).$$

Si definisce **cotangente** dell'angolo α il numero reale indicato $\cot\alpha$ e dato da:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad (6).$$



Per trovare il significato geometrico di tanα, basta fare riferimento alla figura a lato e scrivere che (tenendo presente la similitudine dei due triangoli rettangoli OMP e OAT):

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{AT}}{1} = \mathrm{AT}.$$

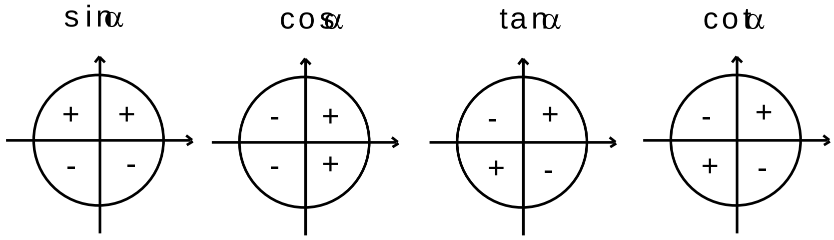
Analogamente, dalla stessa figura (tenendo presente la similitudine dei triangoli rettangoli OMP e OBQ), si ha il significato geometrico di cotα:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{BQ}}{1} = \mathrm{BQ}.$$

Dalle definizioni precedenti delle funzioni goniometriche è possibile stabilire la seguente tabella sul segno di dette funzioni al variare dell'angolo α:

funzione/angolo	0°<α<90°	90°<α<180°	0°<α<270°	0°<α<360°	Periodicità
sinα	+	+	-	-	360°
cosα	+	-	-	+	360°
tanα	+	-	+	-	180°
cotα	+	-	+	-	180°

La figura seguente illustra graficamente le variazioni nel segno delle funzioni goniometriche quando il punto goniometrico corrispondente si trova in uno dei quattro quadranti:



L'ultima colonna della tabella precedente ('**Periodicità**') fa riferimento ad una proprietà importante delle funzioni goniometriche: i valori di dette funzioni si ripetono periodicamente come segue:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha + 720°) = \ldots = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 360°) = \cos(\alpha + 720°) = \ldots = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$$
$$\tan\alpha = \tan(\alpha + 180°) = \tan(\alpha + 360°) = \ldots = \tan(\alpha + k \cdot 180°)$$
$$\cot\alpha = \cot(\alpha + 180°) = \cot(\alpha + 360°) = \ldots = \cot(\alpha + k \cdot 180°)$$

dove *k* è un numero intero (positivo o negativo) qualsiasi.

La periodicità delle funzioni goniometriche è importante in quanto consente di limitare lo studio di tali funzioni su un sottoinsieme opportuno dell'insieme dei numeri reali R.

Infine tale aspetto (la periodicità) delle funzioni goniometriche fa sì che queste funzioni siano molto utilizzate nella descrizione matematica di fenomeni naturali che hanno una periodicità temporale: moti periodici in generale, oscillazioni, moti rotatori, moti ondulatori, e così via.

3 Relazione fondamentale della goniometria e prime conseguenze

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OMP della figura precedente si ha:

$$\mathrm{PM}^2 + \mathrm{OM}^2 = \mathrm{OP}^2 \Rightarrow (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

La relazione precedente si scrive anche:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (7).$$

La (7) è detta anche *relazione fondamentale della gonometria*. Da questa è possibile dedurre alcune conseguenze immediate:

a) Le funzioni seno e coseno sono *funzioni limitate*:

$$-1 \le \sin\alpha \le +1$$
$$-1 \le \cos\alpha \le +1$$

b)

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (8)$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad (9)$$

c) Dividendo entrambi i membri della (7) per $\cos^2\alpha$ (supposto diverso da 0) si ha successivamente:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad (10)$$

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\tan\alpha\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)\Rightarrow$$

$$\sin\alpha=\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad (11)$$

Le indeterminazioni nel segno delle relazioni (8), (9), (10) e (11) vengono risolte conoscendo la misura dell'angolo α.

Le formule (8)-(11) sono molto importanti in quanto consentono di determinare i valori delle funzioni goniometriche di un angolo a partire dalla conoscenza di uno solo di questi valori.

La relazione (8) consente di calcolare $\sin\alpha$ conoscendo il valore di $\cos\alpha$.
La relazione (9) consente di calcolare $\cos\alpha$ conoscendo il valore di $\sin\alpha$.

La relazione (10) consente di calcolare $\cos\alpha$ conoscendo il valore di $\tan\alpha$.
La relazione (11) consente di calcolare $\sin\alpha$ conoscendo il valore di $\tan\alpha$.

Per tutte le formule, bisogna fare attenzione al valore dell’angolo per attribuire il giusto segno al valore della funzione goniometrica calcolata!

Esempi

1 Sia sinα=2/3 ed α compreso tra 90° e 180°. Si ha:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{2/3}{-\sqrt{5}/3} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2 Sia tanα=-3 ed α compreso tra 270° e 360°. Si ha:

$$\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{1+(-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad .$$

$$\cot\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Esercizi

1 Sapendo che $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e che α è compreso tra 180° e 270°, calcolare $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

2 Sapendo che cotα = 2 e che α è compreso tra 180° e 270°, calcolare $\sin\alpha$, $\cos\alpha, \tan\alpha$.

3 Sapendo che $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, calcolare $\sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$, distinguendo le varie soluzioni possibili.

4 Il numero reale *m* rappresenta il seno di un angolo α e viene dato come soluzione dell'equazione di secondo grado: $3m^2 + 10m + 3 = 0$.
a) Discutere le soluzioni dell'equazione.
b) Determinare, per i valori accettabili di *m*, i valori delle corrispondenti funzioni goniometriche coseno, tangente, cotangente.

5 Un angolo acuto α è tale che $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. Determinare i valori di sinα, di cosα e di cotα.

6 Se *m* rappresenta la tangente di un angolo α, trovare i valori possibili di *m* dati dall'equazione: $\frac{1-m^2}{1+m^2} + \frac{2m}{1+m^2} = -1$. (Attenzione: per un'equazione di secondo grado, il cui coefficiente del termine di secondo grado si annulla, una radice è infinita...)

4 Riduzione al primo quadrante ed al primo ottante

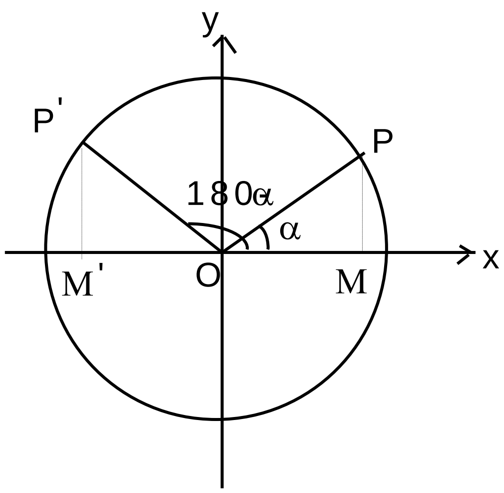
Con l'espressione 'riduzione al primo quadrante' s'intende la possibilità di calcolo di una funzione goniometrica di un angolo qualunque a partire dal valore di una opportuna funzione goniometrica di un angolo compreso tra 0° e 90°.

La cosa è possibile grazie alle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°-\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(180°-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(180°-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°+\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(180°+\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(180°+\alpha)&=\tan\alpha\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°-\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(360°-\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(360°-\alpha)&=-\tan\alpha\end{aligned}\right\}\quad(14)\ .$$



La figura a lato illustra le relazioni (12). In effetti i triangoli OMP e OM'P' sono uguali ed allora si ha:

P'M'=PM $\Rightarrow \sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$

OM'=-OM $\Rightarrow \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$

e dunque anche:

$$\tan(180°-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=$$
$$=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

Considerazioni analoghe, con le opportune modifiche, consentono di dimostrare anche le (13) e le (14).

Con l'espressione 'riduzione al primo ottante' s'intende la possibilità di calcolo di una funzione goniometrica di un angolo qualunque a partire dal valore di una opportuna funzione goniometrica di un angolo compreso tra 0° e 45°.

La cosa è possibile grazie alle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-\alpha)&=\cos\alpha\\ \cos(90°-\alpha)&=\sin\alpha\\ \tan(90°-\alpha)&=\cot\alpha\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Le due operazioni combinate di riduzione al primo quadrante e di riduzione al primo ottante consentono di calcolare le funzioni goniometriche di un angolo qualunque conoscendo una opportuna funzione goniometrica di un angolo compreso tra 0° e 45°. *In questo modo è stato possibile costruire delle tavole numeriche con i valori delle funzioni goniometriche solo per angoli compresi tra 0° e 45°* (vedi Appendice a pag. 42).

Esempi

1 sin245° = sin(180° + 65°) = -sin65° = -sin(90° - 25°) = -cos25°.

2 tan330° = tan(360°-30°) = -tan30° .

In ogni caso oggi, con la larga diffusione delle calcolatrici elettroniche, questo aspetto pratico ha perduto importanza. Resta comunque l'interesse teorico di queste trasformazioni, che possono ritornare utili per semplificare, ad esempio, espressioni contenenti funzioni goniometriche.

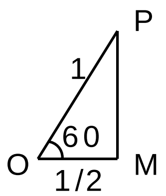
Esercizio

Calcolare le funzioni goniometriche degli angoli seguenti: 70°, 120°, 230°, 345°, mediante opportune funzioni goniometriche di angoli minori o uguali a 45°.

5 Calcolo di funzioni goniometriche per angoli particolari

Utilizzando la definizione delle funzioni goniometriche ed alcune proprietà geometriche elementari dei triangoli rettangoli, è possibile determinare il valore esatto di queste funzioni per angoli particolari per cui tale calcolo risulta particolarmente semplice.

Ad esempio, volendo determinare i valori delle funzioni goniometriche di 60°, basta fare riferimento alla figura seguente ed applicare ad essa il teorema di Pitagora:



$$\sin 60° = PM = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = OM = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

E' possibile anche avere subito i valori delle funzioni goniometriche di 30°.
Infatti si ha:

$$\sin 30° = \sin(90° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \cos(90° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30° = \tan(90° - 60°) = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La tabella seguente fornisce i valori delle funzioni goniometriche per angoli particolari (espressi in gradi sessagesimali e in radianti):

α in gradi	α in radianti	sinα	cosα	tanα	cotα
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

Esercizi

1 Determinare le espressioni esatte di sin45° e cos45°.

2 Tenendo presente che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio della circonferenza, dimostrare (nell'ordine) che:

$$\sin 18° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

$$\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ .$$

$$\tan 18° = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

[Suggerimento: prendendo uguale a 1 il raggio della circonferenza, il lato del decagono è uguale $2\sin 18°$; inoltre se x è il lato del decagono, per la proprietà enunciata deve valere la proporzione: $1{:}x = x{:}1-x$, da cui l'equazione: $x^2 = 1-x$...].

3 Determinare le espressioni esatte di: $\sin 72°$, $\cos 72°$, $\tan 72°$.

4 Calcolare:

a) $\sin 30° + \sin 60°$, $\sin 90°$

b) $\cos 30° + \sin 60° + 2\sin 18°$

c) $\dfrac{\sin 30° + \cos 30°}{\sin 60° + \cos 60°}$

d) $\dfrac{\sin 45° + \cos 45°}{\tan 30°}$

e) $\tan 18° + \tan 72°$, $\tan 90°$

f) $\sin 18° + \sin 72°$, $\sin 90°$

6 Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche

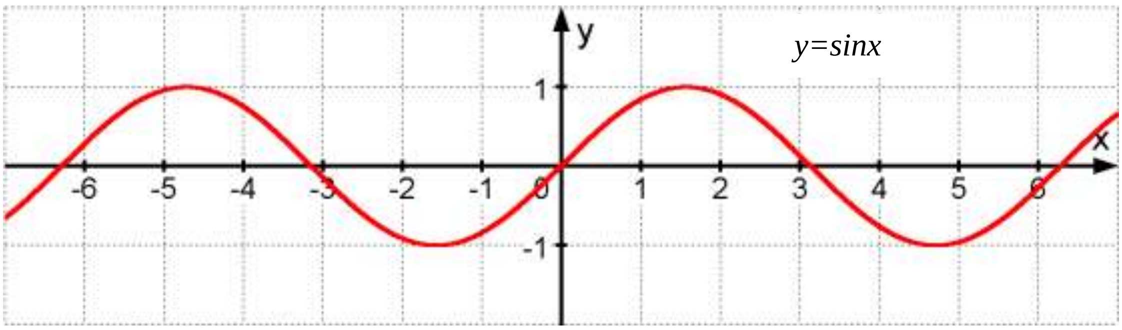
Siccome le funzioni goniometriche sono definite per qualunque angolo, è possibile determinarne il valore con l'ausilio di opportune tavole numeriche o, meglio, con l'ausilio di una calcolatrice elettronica scientifica.

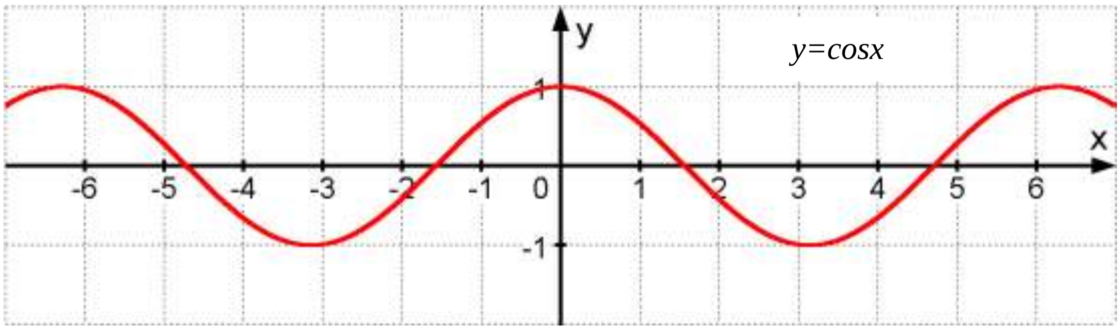
In questo modo, per una data funzione goniometrica, si stabilisce una corrispondenza tra un dato angolo ed il valore della funzione goniometrica per tale angolo, come nello schema che segue:

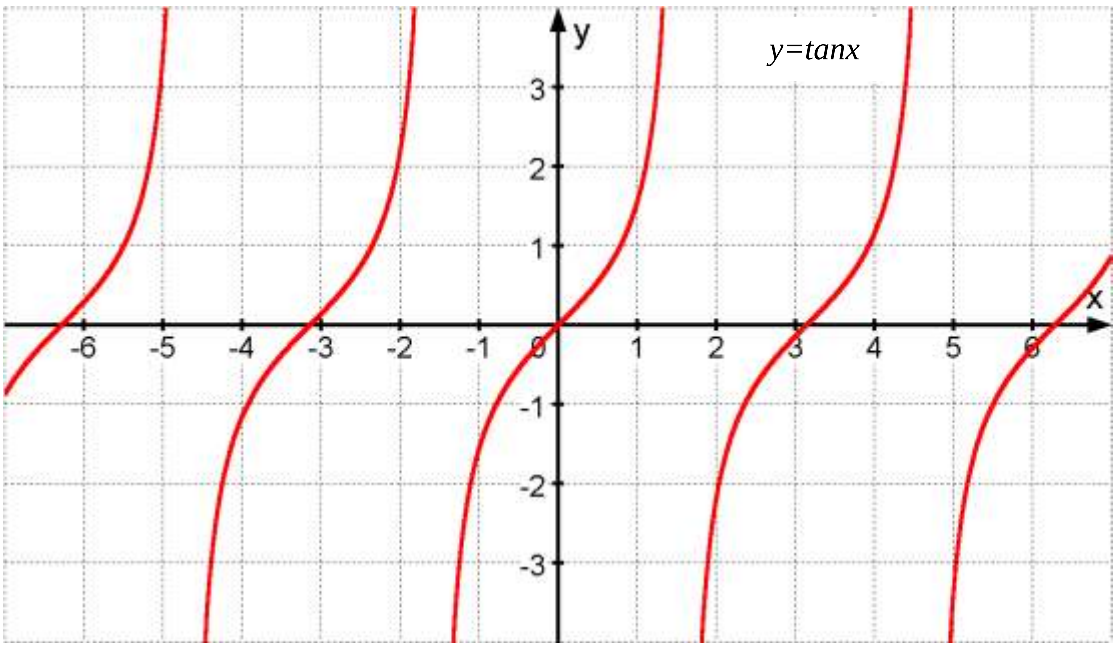
$$\sin\colon R \to R\colon x \to \sin x \in -1{,}1 \subset R$$
$$\cos\colon R \to R\colon x \to \cos x \in -1{,}1 \subset R$$
$$\tan\colon R \to R\colon x \to \tan x \in R$$

E' possibile rappresentare graficamente queste funzioni, in un sistema di coordinate ortonormali *x*O*y*, in cui *x* rappresenta l'angolo (ad esempio in radianti) e *y* rappresenta il valore della funzione goniometrica considerata.

Si ottengono, allora i grafici seguenti:







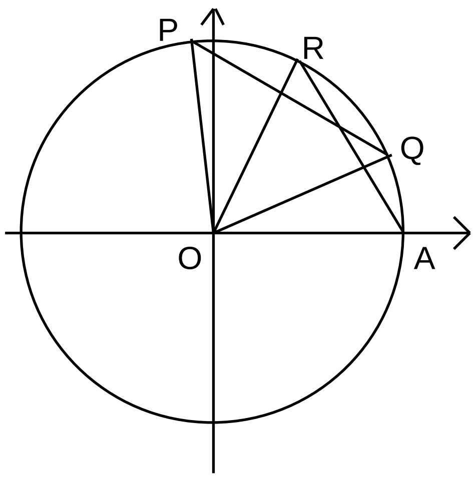
Dai grafici precedenti è anche evidente la periodicità delle funzioni disegnate. Infine, *è da notare che la funzione tangente non è definita per angoli che sono multipli interi dispari (positivi o negativi) di un angolo retto*.

7 Formule di addizione e sottrazione

Con le funzioni goniometriche bisogna fare attenzione a non fare alcuni errori che deriverebbero dall'applicazione di certe proprietà che si suppongono vere, quando vere non sono. Ad esempio, risulta che:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(30°+60°)=\sin 90°=1\\ \sin 30°+\sin 60°=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}>1\end{array}\right\}\Rightarrow \sin(30°+60°)\neq \sin 30°+\sin 60°\,.$$

In questo paragrafo verranno dedotte delle formule corrette per calcolare le funzioni goniometriche della somma o della differenza di due angoli, senza incorrere in errori ingenui.



E' possibile considerare i punti goniometrici P, corrispondente all'angolo α, Q corrispondente all'angolo β, R corrispondente all'angolo α-β e A corrispondente all'angolo 0°. Allora i suddetti punti, nel piano cartesiano, hanno coordinate:

A(0,1) P($\cos\alpha$,$\sin\alpha$) Q($\cos\beta$, $\sin\beta$) R($\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$)

Le corde AR e PQ della circonferenza goniometrica hanno la stessa lunghezza, il che comporta:

$$AR=PQ \Rightarrow AR^2 = PQ^2$$

L'ultima relazione si puo riscrivere (tenendo conto delle coordinate dei punti implicati):

$$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2 \Rightarrow$$
$$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=$$
$$\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha$$

Tenendo conto della relazione fondamentale della goniometria e dividendo successivamente primo e secondo membro della relazione precedente per -2, si ha:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (16)$$

La relazione (16) è la prima delle formule di addizione e sottrazione.

A partire dalla (16), cambiando β in -β e tenendo presente che cos(-β) = cosβ e che sin(-β) = -sin β, si ha:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (17)$$

Se, invece, sempre nella (16), si cambia α in 90°-α, si ha:

$$\cos(90°-\alpha-\beta)=\cos\left[90°-(\alpha+\beta)\right]=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \qquad (18)$$

Se, infine, nella (18), si cambia β in -β, si ha:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \qquad (19)$$

Dalle relazioni (16)-(19) è possibile ottenere le formule di addizione e sottrazione per la tangente. Omettendo la facile dimostrazione, si può scrivere:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad (20)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad (21)$$

Esempi

1 Calcolare sin75°. Si ha:

$\sin 75° = \sin(30° + 45°) =$

$$\sin 30°\cos 45° + \sin 45°\cos 30° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

2 Calcolare tan15°. Si ha:

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°} =$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9-3}=2-\sqrt{3}\,.$$

Esercizi

1 Calcolare: sin15°, cos15°, tan75°, sin105°.

2 Dimostrare le formule (20) e (21).

3 α e β sono angoli acuti tali che $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ e $\cos\beta=\frac{1}{2}$. Determinare le espressioni esatte di $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), \tan(\alpha+\beta)$.

4 α è un angolo acuto e β un angolo ottuso tali che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos\beta = -\frac{1}{3}$. Determinare le espressioni esatte di $\sin(\alpha-\beta), \cos(\alpha+\beta), \tan(\alpha-\beta)$.

5 α e β sono angoli acuti tali che $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Determinare le espressioni esatte di $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), \cot(\alpha-\beta)$.

6 α e β sono angoli acuti tali che $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\alpha+\beta = 90°$. Determinare le espressioni esatte di $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), \tan(\alpha-\beta)$.

8 Formule di duplicazione, di bisezione e formule parametriche

A partire dalle formule di addizione è possibile stabilire le formule di duplicazione, formule che consentono il calcolo delle funzioni goniometriche di un angolo 2α a partire dalle funzioni goniometriche dell'angolo α.
In effetti si ha:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1-2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\ .$$

Riassumendo, si sono ottenuti i seguenti risultati:

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1-2\sin^2\alpha \end{cases} \\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Le tre relazioni (22) si chiamano *formule di duplicazione*.
Riscrivendo la terza espressione di cos2α nelle (22) e ponendo in essa $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α, si ha:

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Riscrivendo la seconda espressione di cos2α nelle (22) e ponendo in essa $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α, si ha:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Infine, facendo il rapporto membro a membro delle ultime due relazioni, si ha:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Da questa espressione 'irrazionale' di $\tan\frac{\alpha}{2}$ è possibile ottenere ancora due espressioni 'razionali', moltiplicando sotto radice, numeratore e denoperatore per esspressioni opportune come segue:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

Riassumendo, si sono ottenuti i risultati seguenti:

$$\underbrace{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \\ \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}}_{(23)}$$

Le tre relazioni (23) si chiamano *formule di bisezione* e consentono di calcolare le funzioni goniometriche di un angolo in funzione di opportune funzioni goniometriche di un angolo doppio.

In queste formule, un certo interesse rivestono specialmente le due espressioni razionali di $\tan\frac{\alpha}{2}$.

Infine, riscrivendo la terza delle (22), ponendo in essa $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α, si ha:

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Ponendo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, le tre formule precedenti si riscrovono così:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{array}\right\} \quad (24)$$

e si chiamano *formule parametriche*, in quanto consentono di determinare (in funzione del *parametro* $t = \tan\frac{\alpha}{2}$) sinα, cosα e tanα, con delle espressioni razionali, in cui non compaiono radici quadrate.

Esercizi

1 Applicando opportunamente le formule di addizione e quelle di duplicazione, dimostrare le seguenti *formule di triplicazione*:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

2 Combinando opportunamente le formule di addizione, dimostrare le seguenti *formule di Werner*:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\ \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

3 Combinando opportunamente le formule di addizione, dimostrare le seguenti *formule di prostaferesi*:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

4 Gli angoli acuti α e β sono tali che $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ e $\sin\beta = \frac{2}{3}$. Calcolare esattamente:

a) $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha, \cos(45° + \alpha)$
b) $\sin 3\beta, \cos 3\beta, \tan 3\beta, \sin 2(\alpha + \beta)$
c) $\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, \tan\frac{\alpha}{2}, \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$
d) $\cot\frac{3\alpha}{2}, \cot\frac{3(\alpha+\beta)}{2}$.

5 Gli angoli acuti α e β sono tali che $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = \frac{2}{3}$. Calcolare le espressioni esatte di: $\tan(2\alpha - \beta)$, $\tan(2\alpha + \beta)$.

6 Calcolare le esppressioni esatte di: $\begin{cases} \sin 36°, \cos 36°, \tan 36°, \\ \sin 54°, \cos 54°, \tan 54° \end{cases}$.

7 Utilizzando le formule di prostaferesi (esercizio **3** precedente), fattorizzare le seguenti somme:
a) sin4x - sin2x
b) cos4x + sin2x
c) sin3x + sin$x$
d) cos3x - cos$x$.
e) $\sin 4x + \sin 6x$
f) $\cos 4x - \cos 6x$

8 Utilizzando le formule di prostaferesi (esercizio **3** precedente), semplificare le seguenti frazioni:
a) $\frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4\text{x} - \cos 6\text{x}}$
b) $\frac{\cos 6x - \cos 4x}{\sin 2x}$
c) $\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 3x}$

9 Equazioni goniometriche fondamentali

A volte è necessario trovare tutti gli angoli, se esistono, che soddisfano una determinata relazione fra espressioni goniometriche. Relazioni di tal genere, che risultano soddisfatte solo per particolari valori degli angoli, si chiamano *equazioni goniometriche*.
Per risolvere le equazioni goniometriche bisogna sempre fare riferimento ad equazioni goniometriche fondamentali, che sono anche le piú semplici possibili. Queste equazioni sono del tipo: sin$x$ = m, cos$x$ = m, tan$x$ = m, dove x è l'angolo incognito che bisogna determinare in modo che l'equazione sia verificata.

a) Equazione sin*x* = *m*
Per questa equazione deve essere -1 ≤ ***m*** ≤ +1, altrimenti non ha significato e non ammette, quindi, soluzioni.

Se m = 1, l'equazione sin x = 1 ammette la soluzione x = 90°, se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e la soluzione $x = 90° + k·360°$ (con k intero, positivo o negativo), se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Se m = -1, l'equazione sin x = -1 ammette la soluzione x = 270°, se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e la soluzione $x = 270° + k·360°$ (con k intero, positivo o negativo, se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Se -1 < m < +1, l'equazione sin$x$ = m, ammette le due soluzioni

$x = \alpha_1$
$x = \alpha_2 = 180° - \alpha_1$,
se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e le soluzioni:

$$x = \alpha_1 + k \cdot 360° = \alpha_1 + 2k \cdot 180°$$
$$x = 180° - \alpha_1 + k \cdot 360° = -\alpha_1 + (2k+1) \cdot 180°$$

se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Le due soluzioni precedenti possono riassumersi nell'unica soluzione:

$$x = (-1)^h \alpha + h \cdot 180°,$$

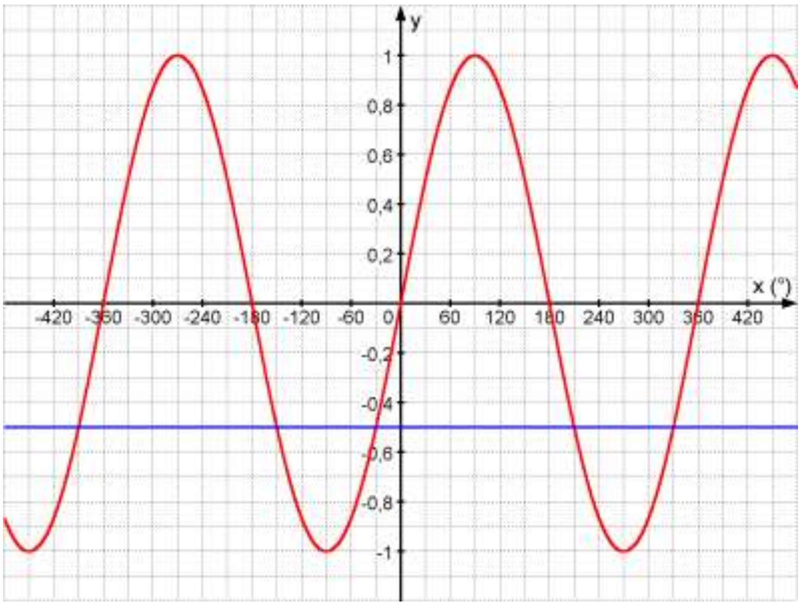
dove α è il piú piccolo angolo positivo tale che sinα = m.

Esempio

Risolvere l'equazione $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Essendo 210° il piú piccolo angolo positivo che verifica l'equazione data, tutte le soluzioni sono date da:

$$x = (-1)^h 210° + h180°.$$



In particolare, cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [-180°, 180°], queste sono: $x_1 = -30°$ (ottenuta con h = 1) e $x_2 = -150°$ (ottenuta con h = -2); cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [0°, 360°], queste sono $x_1 = 210°$ (ottenuta con h = 0) e $x_2 = 330°$ (ottenuta con h = 3). Sul grafico di sopra si vedono chiaramente le soluzioni nell'intervallo [-480°, +480°], soluzioni ottenute come punti d'intersezione della funzione $y = \sin x$ con la retta $y = -\frac{1}{2}$.

b) Equazione cos$x$ = m
Per questa equazione deve essere -1 ≤ m ≤ +1, altrimenti non ha significato e non ammette, quindi, soluzioni.

Se m = 1, l'equazione cos x = 1 ammette la soluzione x = 0°, se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e la soluzione $x = k \cdot 360°$ (con k intero, positivo o negativo), se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Se m = -1, l'equazione cos x = -1 ammette la soluzione x = 180°, se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e la soluzione $x = 180° + k \cdot 360°$ (con k intero, positivo o negativo, se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Se -1 < m < +1, l'equazione cos$x$ = m, ammette le due soluzioni

$x = \alpha_1$
$x = \alpha_2 = 360° - \alpha_1$,

se si considerano accettabili solo le soluzioni comprese nel dominio D = [0°,360°[, e le soluzioni:
$x = \alpha_1 + k \cdot 360°$
$x = 360° - \alpha_1 + k \cdot 360° = -\alpha_1 + (k+1) \cdot 360°$

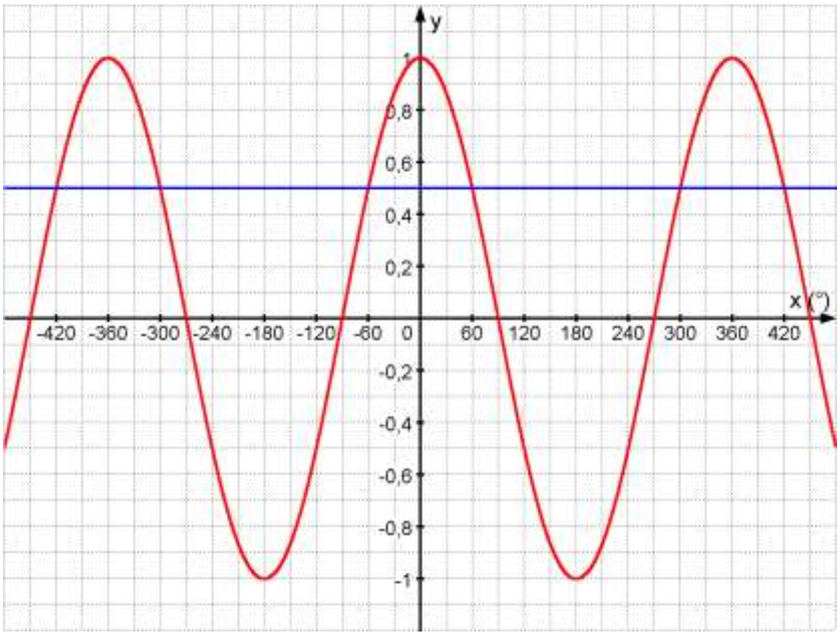
se si considerano le soluzioni comprese nel domionio D = ***R***.

Le due soluzioni precedenti possono riassumersi nell'unica soluzione:

$$x = \pm\alpha + h \cdot 360°,$$

dove α è il piú piccolo angolo positivo tale che cosα = m.

Esempio
Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$.



Essendo 60° il piú piccolo angolo positivo che verifica l'equazione data, tutte le soluzioni sono date da:
$$x = \pm 60° + h360°.$$
In particolare, cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [-180°, 180°], queste sono: $x_1 = 60°$ (ottenuta con h = 0 e prendendo il segno '+') e $x_2 = -60°$ (ottenuta con h = 0 e prendendo il segno '-'); cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [0°, 360°], queste sono $x_1 = 60°$ (ottenuta con h = 0 e prendendo il segno '+') e $x_2 = 300°$ (ottenuta con h = 1 e prendendo il segno '-').

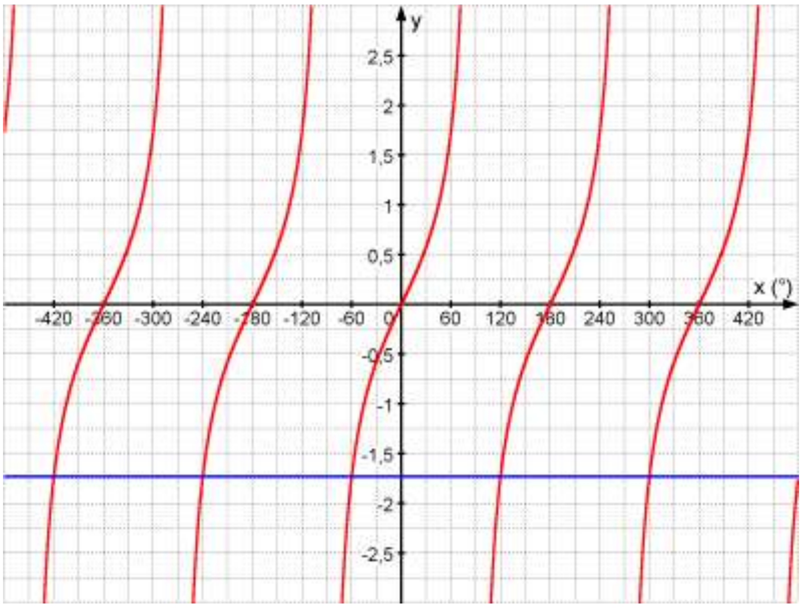
c) Equazione tan*x* = *m*
Per questa equazione $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}$.

Sia α è il piú piccolo angolo positivo tale che tanα = *m*; allora, per la periodicità della funzione tangente, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da:

$$x = \alpha + h \cdot 180°,$$

dove, al solito, $h \in \boldsymbol{Z}$.

Esempio
Risolvere l'equazione
$\tan x = -\sqrt{3}$.
Essendo 120° il piú piccolo angolo positivo che verifica l'equazione data, tutte le soluzioni sono date da:
$x = 120° + h180°$.
In particolare, cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [-180°, 180°], queste sono: $x_1 = 120°$ (ottenuta con *h* = 0) e $x_2 = -60°$ (ottenuta con *h* = -1); cercando solo le soluzioni comprese nell'intervallo [0°, 360°], queste sono $x_1 = 120°$ (ottenuta con *h* = 0) e $x_2 = 300°$ (ottenuta con *h* = 1).



Dal grafico di sopra si vedono chiaramente 6 soluzioni dell’equazione data nell’intervallo [-480°, +480°].

Il riquadro che segue riassume le soluzioni associate a ciascuna equazione goniometrica fondamentale:

$$\sin x = m \Rightarrow x = (-1)^h \cdot \alpha + h\pi$$

$$\cos x = m \;\Rightarrow\; x = \pm\alpha + 2h\pi$$

$$\tan x = m \;\Rightarrow\; x = \alpha + h\pi$$

dove α è il piú piccolo angolo positivo che soddisfa l'equazione e $h \in \boldsymbol{Z}$.

Esercizi
Risolvere le seguenti equazioni:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nell'intervallo [0°, 360°]

b) $\sin x = -\frac{2}{3}$, nell'intervallo [0°, 360°]

c) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, nell'intervallo [-360°, 360°]

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, nell'intervallo [0°, 360°]

e) $\tan x = 5$, nell'intervallo [0°, 360°]

f) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, nell'intervallo [-180°, 180°]

g) $\sin(2x + 30°) = \frac{1}{2}$, nell'intervallo [0°, 360°]

h) $\tan(3x - 15°) = \sqrt{2}$, nell'intervallo [0°, 180°].

10 Equazioni goniometriche di tipo particolare

In questo paragrafo si vedrà rapidamente come risolvere delle equazioni goniometriche di tipo particolare, facendo ricorso alle formule goniometriche conosciute ed alla risoluzione delle equazioni goniometriche fondamentali viste nel paragrafo precedente.

In linea generale, non esistono delle regole precise per risolvere una qualunque equazione goniometrica, ma bisogna cercare di rispettare le regole seguenti:

1 *evitare di avere a che fare con equazioni goniometriche irrazionali (con le funzioni goniometriche dell'incognita che compaiono sotto il segno di radice)*;

2 *far comparire nell'equazione un'unica funzione goniometrica*;

3 *risolvere l'equazione ottenuta usando la funzione goniometrica come incognita*.

4 *ove possibile, anche se una o piú delle regole precedenti non sono applicabili, cercare di fattorizzare il primo membro dell'equazione ed annullare il secondo*.

Si considerano, qui, solo le equazioni seguenti:

a) Equazioni del tipo $a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$ **(con *a, b* e *c* $\in$ *R*)**
Queste equazioni si risolvono trasformando innanzitutto l'equazione in una equazione di secondo grado rispetto a $\sin x$, con la trasformazione

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

e poi risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto a $\sin x$.

Esempio

Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Con la trasformazione $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'equazione data diventa:

$1 - \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x + \sin x = 0$,

che, risolta rispetto a sin*x*, fornisce le soluzioni:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = h \cdot 180° \text{ (con } h \in \boldsymbol{Z}\text{) e}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + h \cdot 360° \text{ (con } h \in \boldsymbol{Z}\text{).}$$

b) Equazioni del tipo $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$ **(con *a, b* e *c* $\in \boldsymbol{R}$)**

Queste equazioni si risolvono trasformando innanzitutto l'equazione in una equazione di secondo grado rispetto a cos*x*, con la trasformazione

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

e poi risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto a cos*x*.

Esempio

Risolvere l'equazione: $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

Con la trasformazione $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, l'equazione data diventa:

$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$,

che, risolta rispetto a cos*x*, fornisce le soluzioni:

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \Rightarrow x \notin \mathrm{R} \\ -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 120° + h \cdot 360° \end{cases}.$$

c) Equazioni del tipo $a\sin x + b\cos x = 0$ **(con *a* e *b* $\in \boldsymbol{R}$)**

Queste equazioni si risolvono dividendo primo e secondo membro per cos*x* (diverso da zero). Si ottiene l'equazione fondamentale $\tan x = -\frac{b}{a}$.

Esempio

Risolvere l'equazione $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Dividendo primo e secondo membro per cos*x*, si ha subito:

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150° + h \cdot 180°.$$

d) Equazioni del tipo $a\sin x + b\cos x = c$ **(con *a, b* e *c* $\in \boldsymbol{R}$)**

Queste equazioni si risolvono trasformando $\sin x$ e cos*x* in $t = \tan\frac{x}{2}$, con le formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Si ottiene una equazione di secondo grado in $t = \tan\frac{x}{2}$.

Esempio
Risolvere l'equazione $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$
Trasformando con le formule parametriche, l'equazione data diventa:
$$\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2\Rightarrow 3t^2-2\sqrt{3}t+1=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}t-1\right)^2=0\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
Dunque: $\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=30°+h\cdot 180°\ \Rightarrow\ x=60°+h\cdot 360°$.

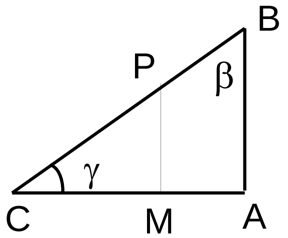
e) Equazioni del tipo $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$ (con *a, b, c* e *d* ∈*R*)
Queste equazioni si risolvono trasformando $\sin x$ e $\cos x$ in $\tan x$ con le formule:
$$\sin x=\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\qquad\qquad \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
Si ottiene una equazione di secondo grado in $\tan x$.

Esempio
Risolvere l'equazione $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=1$.
Trasformando sin*x* e cos*x* in funzione di tan*x*, l'equazione data diventa:
$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{1+\tan^2 x}=1\Rightarrow\tan x=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow x\cong 20°+h\cdot 180°\\ \infty\Rightarrow x=90°+h\cdot 180°\end{cases},$$
dove la soluzione infinita per tan*x* viene fuori in quanto si annulla, nell'equazione risolvente, il coefficiente di $\tan^2 x$.

Esercizi
Risolvere le equazioni:
a) $2\cos^2 x-\sin x+3=0$
b) $3\sin^2 x+\cos x-2=0$
c) $\sin x+\cos x=0$
d) $\sin x+2\cos x=-1$
e) $\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x=-1$
f) $\sin^2 x-2\sin x\cos x+3\cos^2 x=2$
g) $\sin x-\sqrt{3}\cos x-1=0$
h) $\sin x+2\cos x=-1$
i) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$
j) $\sin 4x-\sin 2x=\sin x$
k) $\sin 4x+\sin 2x=2\sin 3x$
l) $\cos 3x+\cos x=\cos 2x$
m) $\cos 4x+\cos 8x=\sqrt{3}\cos 2x$
n) $\sqrt{3}\cos(2x+1)-\sin(2x+1)=1$

11 Risoluzione dei triangoli rettangoli

Con questo paragrafo inizia lo studio della trigonometria vera e propria, in quanto finora si è solo studiato la goniometria. Con la trigonometria si studia la misura degli angoli e dei lati di un triangolo. In questo paragrafo si vedrà la risoluzione di un triangolo rettangolo, che consiste nella determinazione della misura di tutti i lati e di tutti gli angoli del triangolo, a partire da alcuni elementi noti. Nel prossimo paragrafo si vedrà la risoluzione di un triangolo qualunque.



Si considera il triangolo ABC, rettangolo in A. Sulla semiretta [CB] si considera il punto P tale che CP = 1 (il punto P può essere interno o esterno al segmento [CB]). Allora, in base alla definizione della funzione goniometrica seno, deve essere:

$$\sin\gamma = \frac{PM}{CP} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC\sin\gamma$$

Analogamente si può scrivere:

$$\cos\gamma = \frac{MC}{CP} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC\cos\gamma$$

$$\tan\gamma = \frac{PM}{CM} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC\tan\gamma$$

Siccome il triangolo ABC è rettangolo in A, deve essere β = 90° - γ, le tre relazioni precedenti diventano:

$$AB = BC\sin\gamma = BC\sin(90° - \beta) = BC\cos\beta$$

$$AC = BC\cos\gamma = BC\cos(90° - \beta) = BC\sin\beta$$

$$AB = AC\tan\gamma = AC\tan(90° - \beta) = AC\cot\beta$$

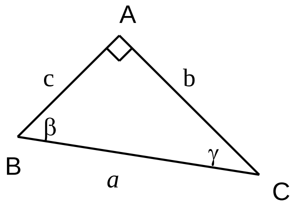
Le relazioni precedenti possono riassumersi nelle regole:

1 *In un triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo acuto opposto.*

2 *In un triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente.*

3 *In triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.*

4 *In triangolo rettangolo, un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto.*



In genere, per un triangolo rettangolo, si usano le notazioni della figura a lato.
Allora le regole precedenti danno le formule:

1: $b = a\sin\beta \qquad c = a\sin\gamma$
2: $b = a\cos\gamma \qquad c = a\cos\beta$
3: $b = c\tan\beta \qquad c = b\tan\gamma$
4: $b = c\cot\gamma \qquad c = b\cot\beta$

Dalle relazioni precedenti sono deducibili tuttte le formule inverse possibili.

Esempi

1 Risolvere il triangolo rettangolo che ha a = 3 cm e b = 2 cm.
Si ha: $\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta \cong 41° 48' 37''$.
Inoltre $\gamma = 90° - \beta \cong 90° - 41° 48' 37'' = 48° 11' 23''$.
Infine: $c = \sqrt{3^2 - 2^2}\ \text{cm} = \sqrt{5}\,\text{cm}$.

2 Risolvere il triangolo rettangolo che ha b = 3 cm e c = 5 cm.
Si ha: $\tan\beta = \frac{b}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 30° 57' 50''$.
Inoltre $\gamma = 90° - \beta \cong 90° - 30° 57' 50'' = 59° 02' 10''$.
Infine: $a = \sqrt{3^2 + 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{34}\,\text{cm}$.

Esercizi

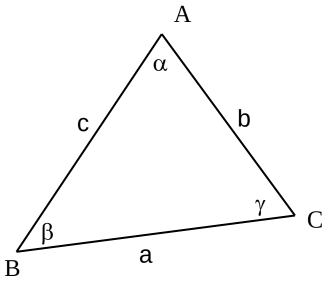
1 Risolvere i seguenti triangoli rettangoli, a partire dagli elementi forniti:
a) a = 5 cm, b = 2.5 cm.
b) a = 3 cm, β = 40°.
c) b = 3 cm, c = 4 cm.
d) b = 3 cm, γ = 30°.
e) b = 5 cm, β= 50°.

2 Di un triangolo rettangolo si conosce a = 5 cm e β = 40°. Calcolare:
a) b, c, γ ;
b) l'altezza relativa all'ipotenusa
c) la mediana relativa all'ipotenusa ed i due angoli che questa mediana forma con l'ipotenusa stessa.

3 Di un triangolo rettangolo si conosce b = 4 cm, c= 3 cm. Calcolare:
a) a, β, γ
b) le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

4 L'altezza relativa ad un lato di un triangolo ABC misura 3 cm. Le proiezioni degli altri due lati sul primo misurano 4 cm e 5 cm. Determinare le misure dei lati e degli angoli del triangolo ABC.

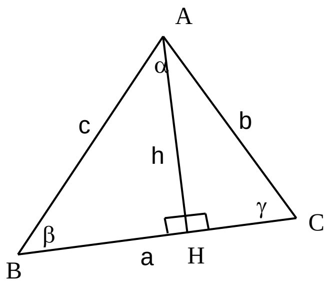
12 Risoluzione di un triangolo qualunque



Per un triangolo qualunque bisogna vedere innanzitutto le notazioni standard, come nella figura a lato.

La risoluzione di un triangolo qualunque necessita della conoscenza di alcuni teoremi generali che verranno discussi brevemente nel seguito.

Area di un triangolo



L'area del triangolo ABC è data da $S = \frac{1}{2}ah$. Ma, dal triangolo rettangolo AHC del figura a lato si ha che $h = b\sin\gamma$; dunque si ha:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Analogamente si sarebbe potuto ottenere anche:

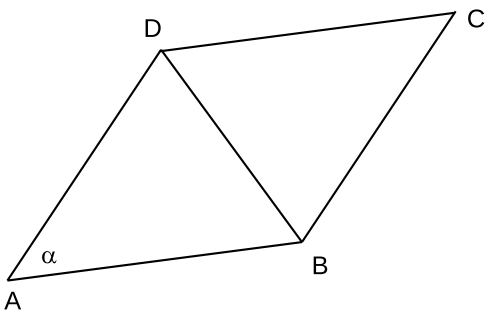
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Dunque: *l'area di un triangolo qualunque è uguale al semiprodotto di due lati qualunque per il seno dell'angolo compreso fra questi due lati*.

Area di un parallelogramma

L'area del parallelogramma ABCD si può pensare uguale a due volte l'area del triangolo ABD. Dunque l'area del parallelogramma è uguale a:

$$S = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\alpha\right)$$
$$= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\alpha$$



Dunque: *l'area di un parallelogram-ma è uguale al prodotto di due lati consecutivi per il seno dell'angolo compreso tra questi due lati*.

Teorema dei seni
Dalle formule per l'area di un triangolo, viste in precedenza, si può scrivere:

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Moltiplicando tutti i membri delle uguaglianze precedenti per $\frac{2}{abc}$, si ha:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

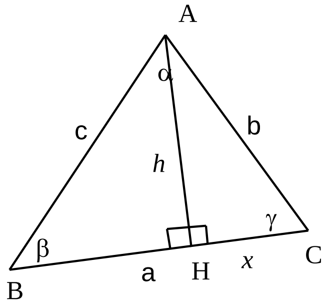
Le relazioni precedenti esprimono il teorema dei seni: *in un triangolo qualunque, è costante il rapporto tra il seno di un angolo ed il lato opposto a questo angolo*.

Teorema delle proiezioni
Dalla figura precedente risulta:
BC = BH + HC = ABcosβ + ACcosγ $\Rightarrow$ $a = c\cos\beta + b\cos\gamma$.

Analogamente, si ha anche:

$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

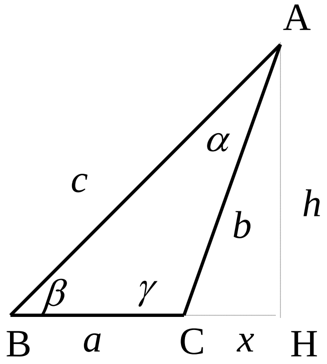
Teorema del coseno
Si possono distinguere due casi:
a) <u>triangolo ABC acutangolo</u>



Dal triangolo rettangolo ABH si ha (HC = x):
$c^2 = h^2 + (a-x)^2$.
Dal triangolo rettangolo AHC si ha: $h^2 = b^2 - x^2$, che, sostituito nella relazione precedente, dà:
$c^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \Rightarrow$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
perchè $x = b\cos\gamma$.

b) <u>triangolo ABC ottusangolo</u>

Dal triangolo rettangolo si ha (HC = x):
$c^2 = h^2 + (a+x)^2$.
Dal triangolo rettangolo AHC si ha: $h^2 = b^2 - x^2$, che, sostituito nella relazione precedente, dà:
$c^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \Rightarrow$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
perchè $x = b\cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma$.



La relazione precedente si può ricavare per qualunque altro lato del triangolo, in modo che si possono scrivere le tre relazioni generali:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

che esprimono il teorema de coseno: *in un triangolo qualunque, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati della misura degli altri due lati diminuito del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso*.

Il teorema precedente, detto anche *teorema di Pitagora generalizzato* o *teorema di Carnot*, fornisce pure tre formule inverse per il calcolo del coseno di un angolo in funzione delle misure dei tre lati di un triangolo:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad .$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Esempi

1 Di un triangolo si sa che a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. Risolvere il triangolo e calcolarne l'area.
Dal teorema del coseno si ha:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 6^2 - 3^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{43}{48} \;\Rightarrow\; \alpha = 26°23'03''.$$

Applicando ancora il teorema del coseno si ha:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2\cdot 3\cdot 6} = \frac{29}{36} \;\Rightarrow\; \beta = 36°20'10''.$$

Inoltre si ha: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 62°43'13'' = 117°16'47''$.
Infine, l'area del triangolo è:
$S = \frac{1}{2} ab\sin\gamma = \frac{1}{2} 3\cdot 4\cdot \sin 117°16'47''\,\mathrm{cm}^2 \cong 5.33\,\mathrm{cm}^2$.

2 Di un triangolo si sa che a = 4 cm, b = 3 cm, α = 60°. Risolvere il triangolo.
Applicando il teorema dei seni, si ha:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \;\Rightarrow\; \beta = 40°30'19''.$$

Inoltre si ha: $\gamma = 180° - (60° + 40°30'19'') = 79°29'41''$.

Applicando ancora il teorema dei seni, si ha:

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} a \cong \frac{0.986}{0.866} 4\text{cm} \cong 4.55\text{cm}.$$

Esercizi

1 Risolvere i seguenti triangoli qualunque, a partire dagli elementi noti:
a) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 4 cm.
b) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 2 cm.
c) a = 2 cm, b = 3 cm, α = 30°.
d) a = 5 cm, α = 30°, β= 50°.
e) α = 66°, γ = 40°, a = 5 cm.
f) a = 5 cm, b = 4 cm, γ = 43°.

2 Calcolare l'area dei seguenti triangoli:
a) a = 4 cm, c = 6 cm, β = 30°.
b) a = 7 cm, b = 5 cm, c = 6 cm.

3 Dimostrare che il diametro di una circonferenza circoscritta ad un triangolo è uguale al rapporto tra un lato del triangolo ed il seno dell'angolo opposto al lato.

4 Dimostrare il teorema del coseno a partire dalle tre espressioni che esprimono il teorema delle proiezioni.

5 Un parallelogramma ABCD ha AB = 5 cm, AD = 4 cm e α = 50°. Calcolare:
a) l'area del parallelogramma
b) la misura dell'altezza relativa al lato AB.
c) gli angoli che la diagonale uscente da A forma con i lati AB e BC.

6 Un triangolo rettangolo ABC ha a = 5 e β = 30°.
a) Risolvere il triangolo.
b) Determinare sul cateto AB un punto P tale che l'area del triangolo APC sia doppia dell'area del triangolo PCB.
c) Se Q è il punto medio del cateto AC, calcolare le misure degli angoli acuti del triangolo BQC.

7 Dimostrare che, in ogni triangolo ABC, risulta:

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}.$$

8 Utilizzando la formula di addizione, il teorema dei seni e quello del coseno, dimostrare che in un triangolo qualunque si ha:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{b\left(a^2-b^2\right)}{c\left(a^2-c^2\right)}.$$

13 Studio delle funzioni $y = k\sin(ax+b)$ e $y = k\cos(ax+b)$

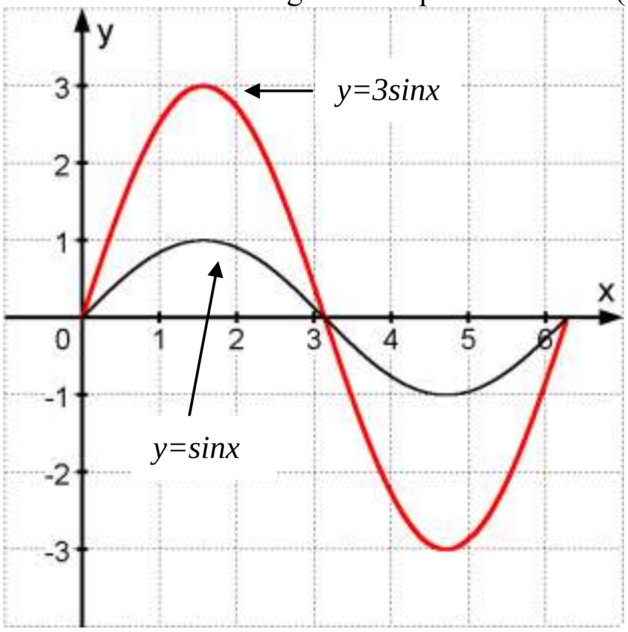
Lo studio di queste due funzioni sarà condotto 'in parallelo', cioè considerando contemporaneamente le due funzioni e studiando la dipendenza di dette funzioni dai parametri reali k, a e b.

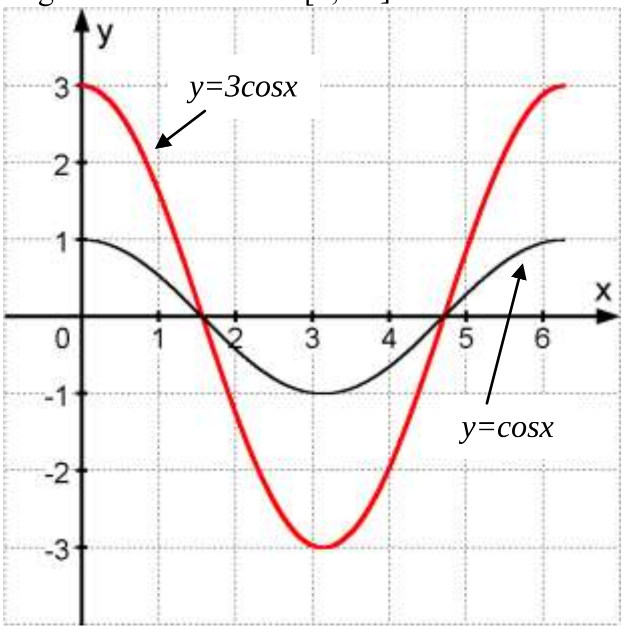
Anche se esistono dei metodi generali di studio delle funzioni, metodi che fanno ricorso, in particolare, al calcolo differenziale, in questa sede interessa per le funzioni date uno studio piú intuitivo, che fa ricorso ad analogie immediate e alla periodicità delle funzioni considerate.

Tale studio 'intuitivo' consente di individuare subito zeri, massimi relativi, minimi relativi e flessi di questa categoria di funzioni

Per maggiore chiarezza, si considerano prima alcuni casi particolari.

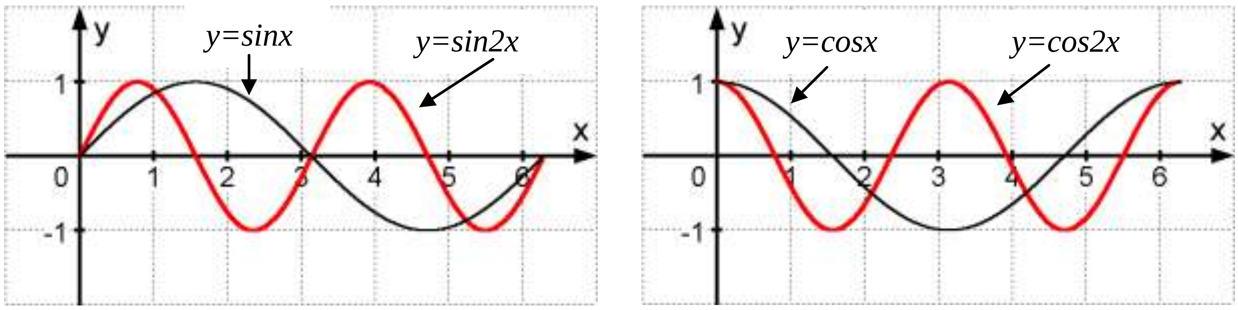
Per tutti questi casi particolari, viene rappresentato, nello stesso riferimento cartesiano, anche la 'funzione di riferimento' $y = \sin x$ oppure $y = \cos x$.
A) $k = 3$, $a = 1$ e $b = 0$. In questo caso le funzioni diventano: $y = 3\sin x$ e $y = 3\cos x$. Le due figure sottostanti mostrano i grafici di queste funzioni (disegnate nell'intervallo $[0, 2\pi]$.





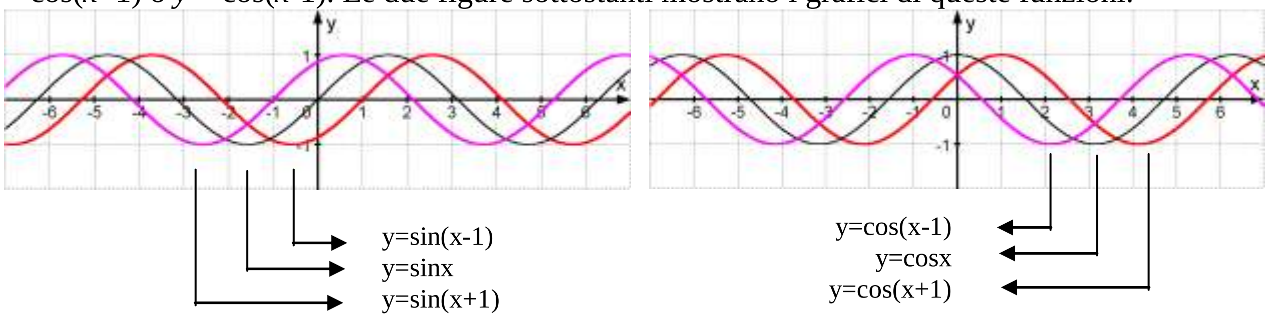
In questo caso (e negli altri anologhi in cui $a = 1$ e $b = 0$), le ascisse degli zeri, dei massimi e minimi relativi e dei flessi della funzione $y = 3\sin x$ (rispettivamente $y = 3\cos x$) sono uguali a quelle dei corrispondenti punti della funzione $y = \sin x$ (rispetti-vamente $y = \cos x$). L'ampiezza massima (o minima) è triplicata rispetto alle funzioni di riferimento. E' facile, allora, intuire che il parametro k contribuisce solo a moltiplicare di un fattore k le ampiezze delle funzioni considerate.

B) $k = 1$, $a = 2$, $b = 0$. In questo caso le funzioni diventano: $y = \sin 2x$ e $y = \cos 2x$. Le due figure sottostanti mostrano i grafici di queste funzioni.



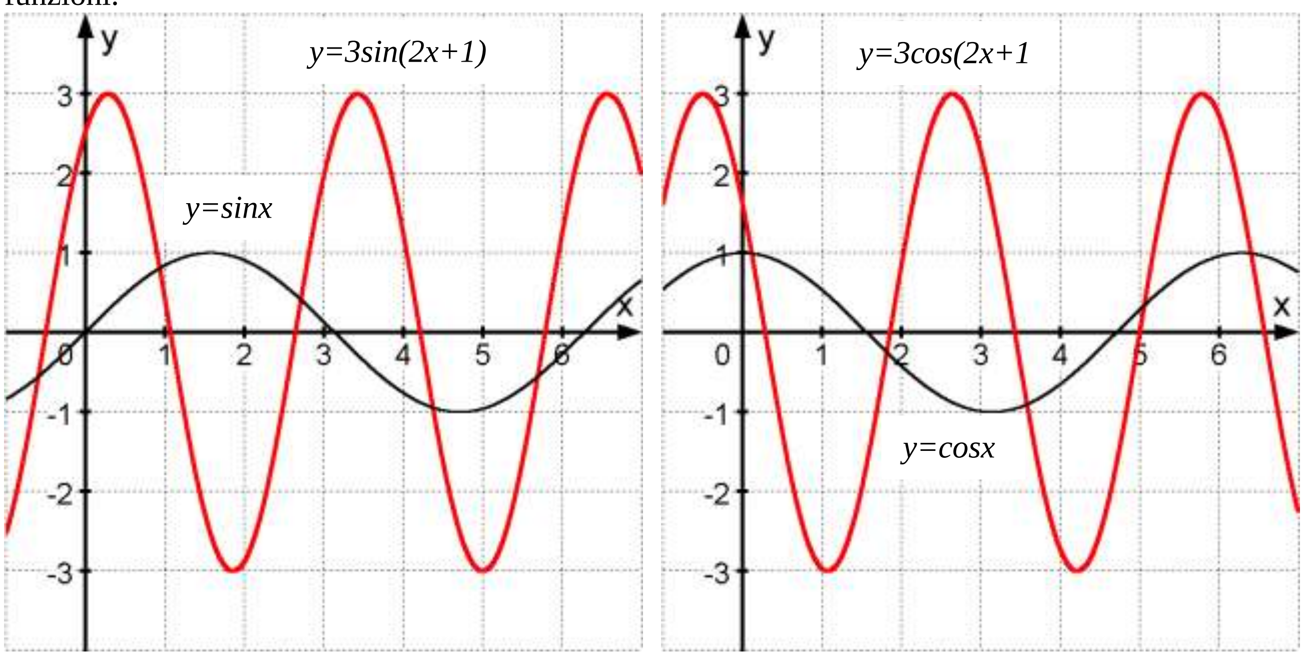
In questo caso, le ampiezze sono le stesse, ma il periodo è dimezzato. Il risultato è facilmente generalizzabile, nel senso che le funzioni y = sin(ax) e y = cos(ax) avranno un peridodo uguale 360°/a ed ampiezze uguali a quelle delle funzioni di riferimento.

C) k = 1, a = 1, b = 1 o b = -1. In questo caso le funzioni diventano: y = sin(x+1) o y = sin(x-1) e y = cos(x+1) o y = cos(x-1). Le due figure sottostanti mostrano i grafici di queste funzioni.



In questo caso, le ampiezze sono le stesse, il periodo è lo stesso, ma le funzioni sono traslate di un radiante parallelamente all'asse delle ascisse, verso sinistra se b = + 1, verso destra se b = -1. Il risultato è facilmente generalizzabile, nel senso che le funzioni y = sin(x+b) e y = cos(x+b) avranno un peridodo uguale 360°, ampiezze uguali a quelle delle funzioni di riferimento, ma saranno traslate rispetto alle funzioni di rifeimento di b radianti, verso sinistra se b > 0 oppure verso destra se b < 0.

D) k = 3, b = 2, c = 1. Questo caso è riassuntivo dei tre casi particolari precedenti e le funzioni diventano: y = 3sin(2x+1) e y = 3cos(2x+1). Le due figure sottostanti mostrano i grafici di queste funzioni.



In questo caso, le ampriezze sono triplicate, i periodi dimezzati rispetto alle funzioni di riferimento ed i grafici complessivi sono traslati verso sinistra di 1/2 radiante, sempre parallelamente all'asse delle ascisse *x*.

Riassumendo si può dire che le funzioni $y = k\sin(ax+b)$ e $y = k\cos(ax+b)$ hanno:

- ampiezza *k* volte l'ampiezza di $y = \sin x$ (o $y = \cos x$)
- periodo uguale a 360°/*a*
- rappresentazione grafica traslata parallalamente all'asse delle ascisse di *b*/*a* radianti, verso sinistra se *b*/*a* è positivo, verso destra se *b*/*a* è negativo.

Esercizi
Rappresentare graficamente le seguenti funzioni (specificando per ognuna anche il periodo), nell'intevallo indicato:

a) $y = \frac{1}{2}\sin x, y = \frac{1}{2}\cos x$, su D = [0°,360°]

b) $y = \frac{1}{2}\sin 3x, y = \frac{1}{2}\sin 3x$, su D = [0°,180°]

c) $y = 2\sin(4x+5), y = 2\cos(4x+5)$, su D = [0°,180°]

d) $y = 3\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right), y = 3\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$, su D = [0,2π].

e) $y = \sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{4}\right), y = \cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$, su D = [0,2π].

14 Disequazioni goniometriche

Una disequazione goniometrica è una disequazione dove compaiono funzioni goniometriche.
Data la periodicità delle funzioni goniometriche per lo studio di una disequazione goniometrica viene, in genere, fissato l'intervallo di studio.
Esempi di disequazioni goniometriche sono:

$$(a)\begin{cases} 2\sin x - 1 > 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} \sin x(2\cos x - 1) < 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} \cos 2x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) \geq 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} \cos x\left(5\sin 2x - 1\right) \geq 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Come si vede dagli esempi di sopra, l'intervallo di studio di ciascuna disequazione goniometrica è dato.

Sebbene possano essere considerati metodi diversi, il metodo migliore per studiare le disequazioni goniometriche é quello grafico, come si vedrà dalla soluzione di alcuni esempi.

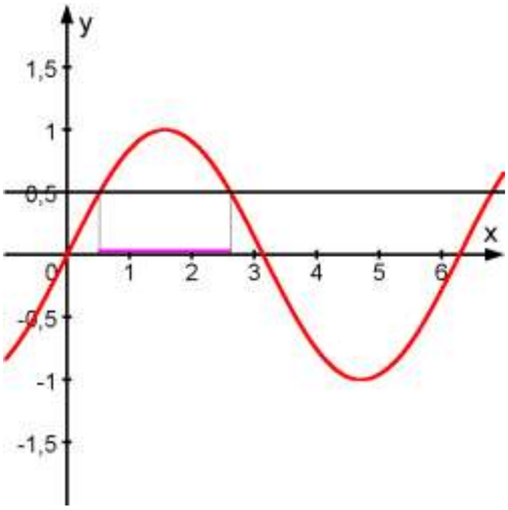
Esempi

1 Sia da risolvere la disequazione (a). S i ha:

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 > 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x > \dfrac{1}{2} \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

A questo punto basta disegnare, in uno stesso sistema di riferimento cartesiano, sia la funzione $f(x) = \sin x$ sia la funzione $g(x) = \frac{1}{2}$ e leggere dal grafico gli intervalli eventuali per cui risulta: $f(x) > g(x)$.

Ecco i grafici delle due funzioni in uno stesso sitema di riferimento cartesiano:



L'intervallo per cui risulta $f(x) > g(x)$ è l'intervallo]α,β[segnato in grassetto al disopra dell'asse delle *x*. Per determinare α e β basta risolvere l'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

che dà subito α = 30° = π/6 radianti e β = 150° = 5π/6 radianti. Dunque l'insieme soluzione della disequazione è l'intervallo aperto $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$.

2 La risoluzione della disequazione (b) conduce alla risoluzione di due sistemi di disequazioni (in quanto il prodotto di due numeri è negativo quando il primo è positivo ed il secondo negativo o viceversa):

$$\begin{cases} \sin x(2\cos x - 1) < 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[(1)\begin{cases} \sin x > 0 \\ 2\cos x - 1 < 0, \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (2)\begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\cos x - 1 > 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \right] \Rightarrow$$

$$\left[(1)\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < \dfrac{1}{2} \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}, (2)\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > \dfrac{1}{2} \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases} \right]$$

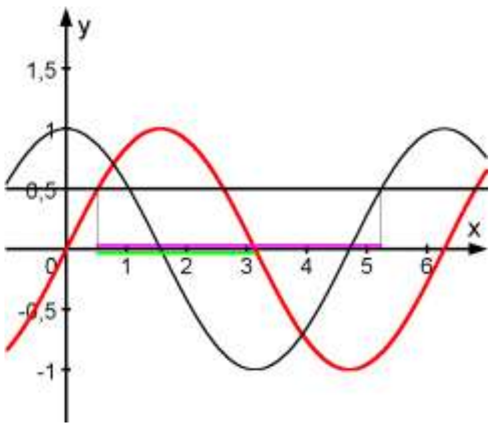
Allora, la soluzione *S* della disequazione data sarà: $S = S_1 \cup S_2 = \left(S_1^{'} \cap S_1^{''}\right) \cup \left(S_2^{'} \cap S_2^{''}\right)$, dove S_1 e S_2 sono le soluzioni del primo e del secondo sistema rispettivamente, S_1' e S_1" sono le soluzioni della prima e della seconda disequazione del primo sistema, S_2' e S_2" sono le soluzioni della prima e della seconda disequazione del secondo sistema.

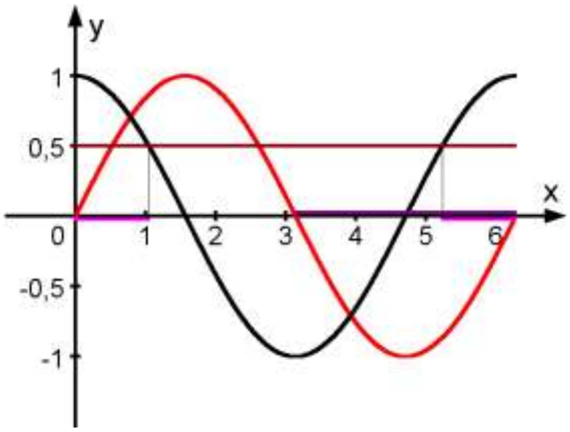
Passando alla soluzione S_1 del primo sistema, bisogna considerare il grafico sottostante.L'intervallo S_1', per cui risulta sin$x > 0$, è l'intervallo]0, π[segnato in grassetto al disopra dell'asse delle x. L'intervallo S_1'' per cui risulta, cosx < 1/2, è l'inter-vallo]α, β[segnato in grassetto al disotto dell'asse delle x. Per determinare α e β basta risolvere l'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$ che dà subito α = 60° = π/3 radianti e β = 300° = 5π/3 radianti. Dunque:

$$S_1 =]0,\pi[\cap \left]\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right[= \left]\frac{\pi}{3},\pi\right[.$$

Passando alla soluzione S_2 del secondo sistema, bisogna considerare il grafico sottostante. L'intervallo S_2' per cui risulta sin$x < 0$ è l'intervallo]π, 2π[segnato in grassetto al disopra dell'asse delle x. L'intervallo S_2'' per cui risulta cosx > 1/2 è l'unione degli intervalli]0, α[e]β, 2π[segnati in grassetto al disotto dell'asse delle x. Come in precedenza, α = 60° = π/3 radianti e β = 300° = 5π/3 radianti. Dunque:

$$S_2 =]\pi,2\pi[\cap \left(\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}\pi,2\pi\right[\right) = \left]\frac{5}{3}\pi,2\pi\right[.$$





Infine, la soluzione S del sistema considerato è data da:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left]\frac{\pi}{3},\pi\right[\cup \left]\frac{5}{3}\pi,2\pi\right[.$$

3 Sia da risolvere la disequazione:

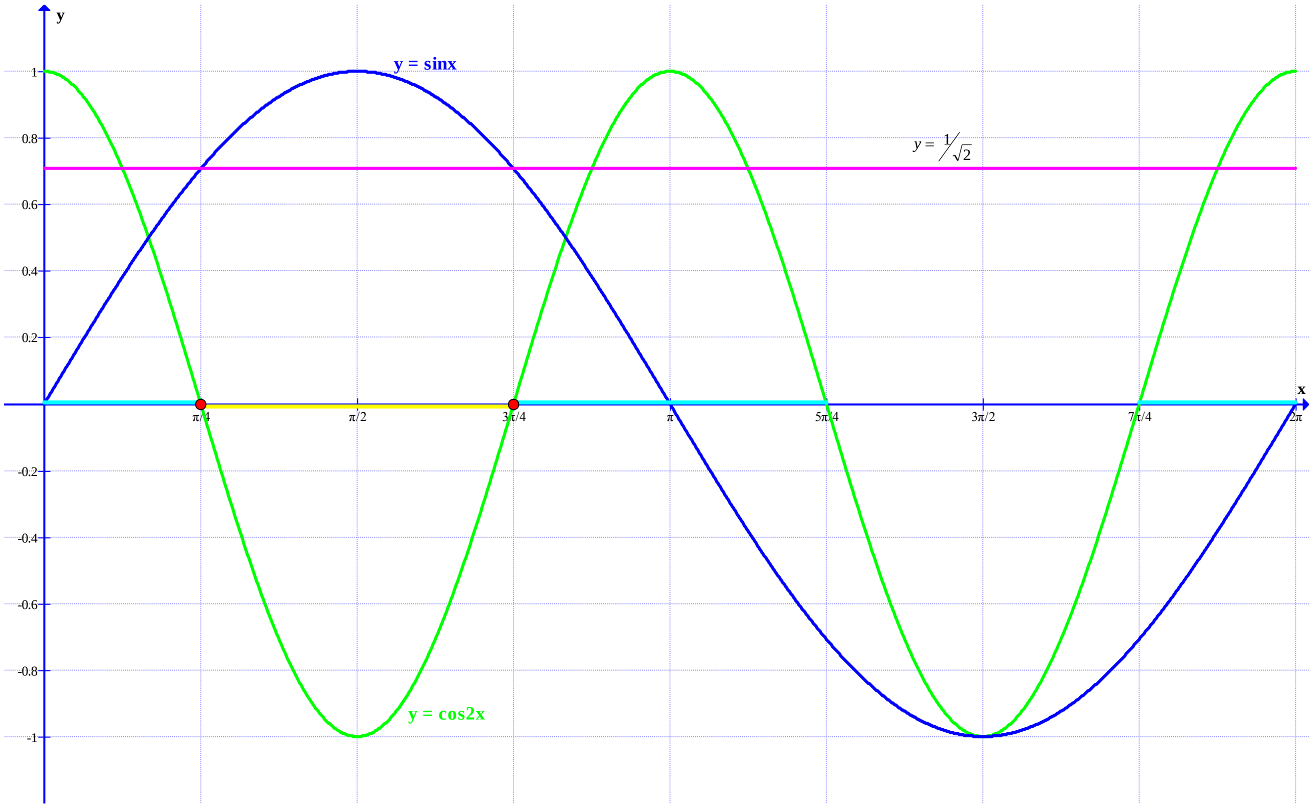
$$\begin{cases} \cos 2x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) \geq 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} .$$

La disequazione precedente comporta la risoluzione dei due sistemi di disequazioni:

$$\left[(1)\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sqrt{2}\sin x - 1 \geq 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}, (2)\begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \sqrt{2}\sin x - 1 \leq 0 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[(1)\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}, (2)\begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \right]$$

Allora, la soluzione S della disequazione data sarà: $S = S_1 \cup S_2 = \left(S_1' \cap S_1''\right) \cup \left(S_2' \cap S_2''\right)$, dove S_1 e S_2 sono le soluzioni del primo e del secondo sistema rispettivamente, S_1' e S_1" sono le soluzioni della prima e della seconda disequazione del primo sistema, S_2' e S_2" sono le soluzioni della prima e della seconda disequazione del secondo sistema.

Passando alla soluzione S_1 del primo sistema, bisogna considerare il grafico seguente:



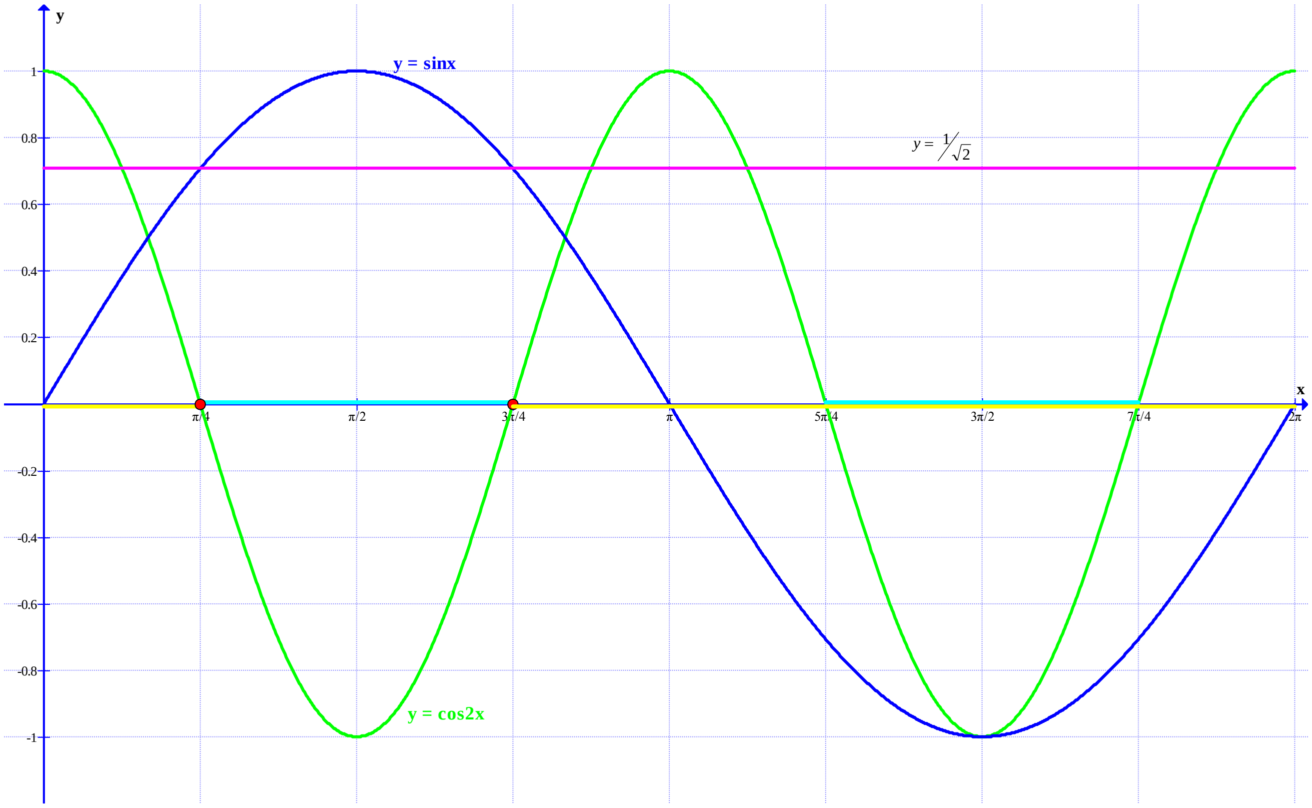
L'intervallo S_1' per cui risulta $\cos 2x \geq 0$ è l'intervallo $0, \pi/4 \cup 3\pi/4, 5\pi/4 \cup 7\pi/4, 2\pi$, segnato in grassetto al disopra dell'asse delle *x*. L'intervallo S_1" per cui risulta $\sin x \geq 1/\sqrt{2}$ è l'intervallo $[\alpha, \beta]$ segnato in grassetto al disotto dell'asse delle *x*. Per determinare α e β basta risolvere l'equazione

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che dà subito $\alpha = 45° = \pi/4$ radianti e $\beta = 135° = 3\pi/4$ radianti. Dunque $S_1" = [\pi/4, 3\pi/4]$ e:

$$S_1 = S_1^{'} \cap S_1^{''} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right\}.$$

Per la soluzione del secondo sistema bisogna considerare il grafico:



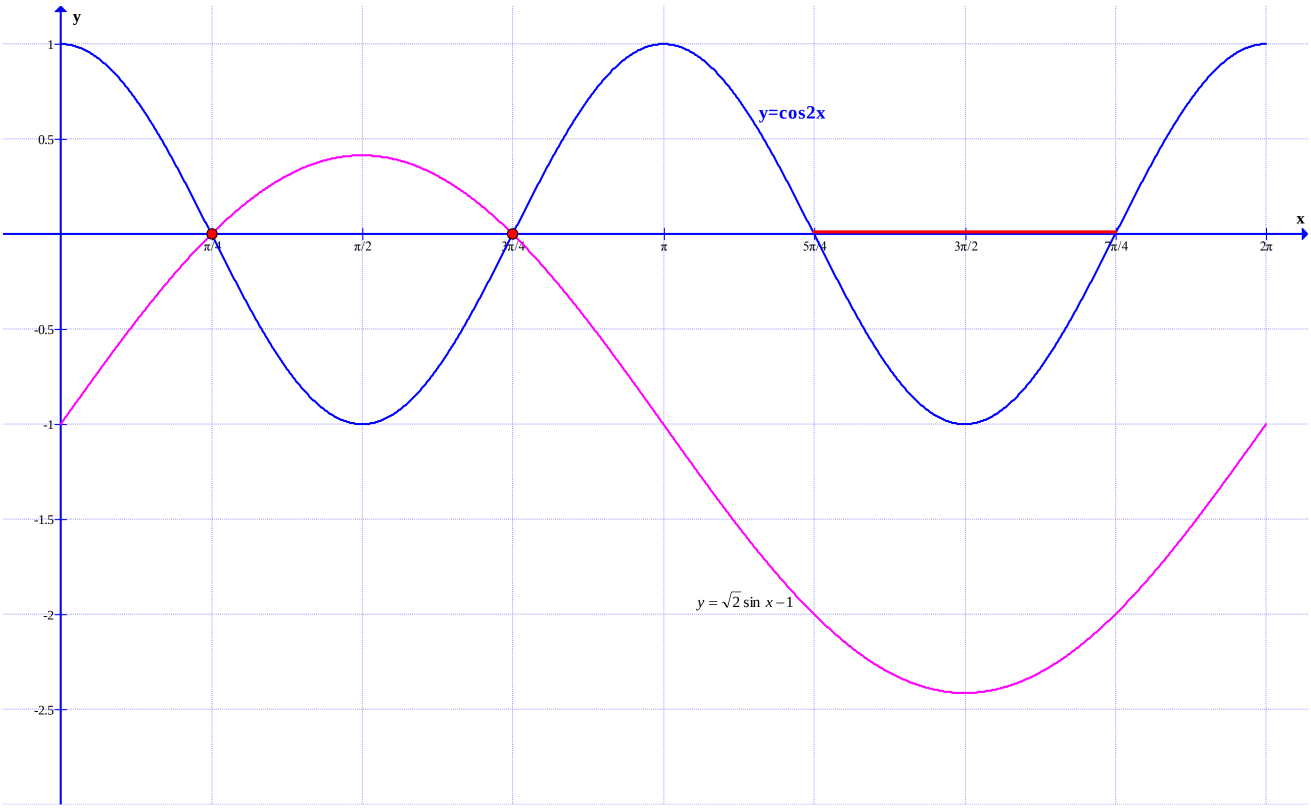
L'intervallo S_2' per cui risulta cos2$x \le 0$ è l'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$,
segnato in grassetto al disopra dell'asse delle *x*. L'intervallo S_2'' per cui risulta sin$x \le 1/\sqrt{2}$ è l'intervallo $[0, \alpha] \cup [\beta, 2\pi]$ segnato in grassetto al disotto dell'asse delle *x*.
Anche qui $\alpha = 45° = \pi/4$ radianti e $\beta = 135° = 3\pi/4$ radianti. Allora:

$S_1'' = [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 2\pi]$ e $S_2 = S_2' \cap S_2'' = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right\} \cup \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$.

Dunque:

$$S = S_1 \cap S_2 = S_2 = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right\} \cup \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right].$$

<u>Alternativamente</u>, si sarebbero potute trarre le stesse conclusioni dall'unico grafico:

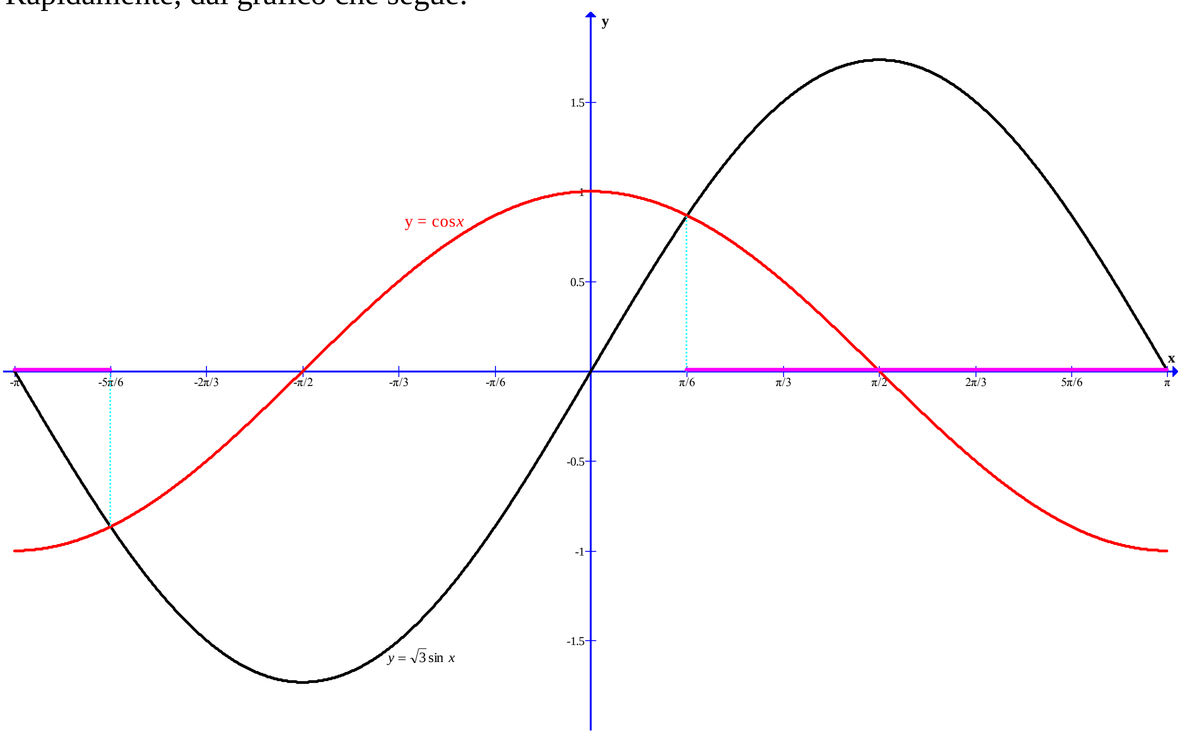


Vedendo dove le due funzioni sono nulle, entrambe positive o entrambe negative.

4 Risolvere la disequazione:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x \geq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Rapidamente, dal grafico che segue:



si trova subito che l'insieme soluzione della disequazione data è l'intervallo [-π,α]∪[β,π], dove α e β si determinano risolvendo (nell'intervallo considerato) l'equazione:

$$\sqrt{3}\sin x = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{5}{6}\pi \\ \beta = \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

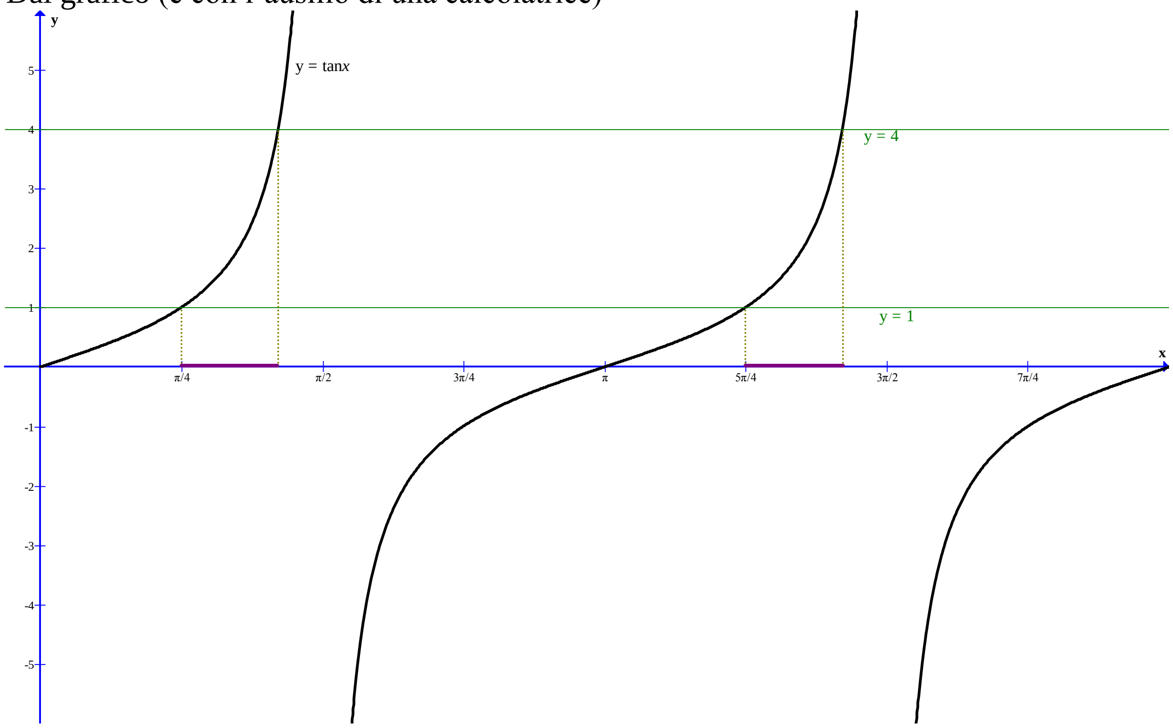
Dunque l'insieme soluzione è l'intervallo: $\left[-\pi, -\frac{5}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$.

5 Risolvere la disequazione $\begin{cases} \tan^2 x - 5\tan x + 4 < 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$.

Algebricamente, la disequazione data è equivalente alle due disequazioni:

$$\begin{cases} 1 < \tan x < 4 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

Dal grafico (e con l'ausilio di una calcolatrice)



si ha subito che l'insieme soluzione è l'intervallo]α, β[∪]γ, δ[, dove:

α = 45° = π/4,

β = 75°57'50" = 1.326 radianti,

γ = 225° = 5π/4,

δ = 255°57'50" = 4.467 radianti.

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche:

a) $\begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \sin 2x \geq 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \geq 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

d) $\begin{cases} \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\cos x - 2\right) < 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x - 1 \leq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

f) $\begin{cases} (\tan x - 2)(\tan x + 3) \geq 0 \\ x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Appendice: Valori numerici delle funzioni goniometriche (0° ≤ x ≤ 45°)

x	**sin*x***	**cos*x***	**tan*x***	**cot*x***
0°	0,0000	1,0000	0,0000	∞
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000